UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté d’éducation

Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique

par
Virginie Robert, 11 021 324

Mémoire présenté à la Faculté d’éducation
en vue de l’obtention du grade de
Maîtrise ès Arts (M.A.)
Sciences de l’éducation

Juin 2018

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté d'éducation

Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique

Virginie Robert

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Hassane Squalli — Directeur de recherche

Alain Bronner — Codirecteur de recherche

Adolphe Adihou — Autre membre du jury

Mémoire accepté le 27 juin 2018

SOMMAIRE

À l'instar de plusieurs pays à travers le monde, le système d'enseignement du Québec place la pensée mathématique comme l'une des finalités de la formation mathématique. C'est effectivement en privilégiant une approche par compétences que le *Programme de formation de l'école québécoise* (PFÉQ) souhaite fournir à l'élève des ressources pour établir un rapport aux savoirs et former sa pensée, en particulier sa pensée mathématique (Gouvernement du Québec, 2006). Dans les programmes et dans les recherches en didactique des mathématiques, la pensée mathématique est souvent traitée et observée à travers l'une de ses différentes formes. À titre d'exemple, dans ses documents officiels, le PFÉQ énonce cinq formes de la pensée mathématique qui se rattachent respectivement aux cinq domaines de contenus de la formation secondaire : la pensée arithmétique, la pensée algébrique, la pensée géométrique, la pensée statistique et la pensée probabiliste (Gouvernement du Québec, 2016). Or, malgré son potentiel important, l'une des formes de la pensée mathématique reste dans l'ombre : la pensée fonctionnelle.

Parmi les rares recherches sur la pensée fonctionnelle recensées, la plupart ont été réalisées dans le cadre du mouvement *Early Algebra.* Or, bien qu'elles soient très intéressantes, ces études n'approchent pas le développement de la pensée fonctionnelle comme un objet d'étude en soi, mais comme une voie pour le développement de la pensée algébrique. Dans un même ordre d'idées, les définitions de la pensée fonctionnelle proposées dans les recherches de *Early Algebra* la fixent dans le cadre du domaine algébrique alors que sa portée surpasse les frontières de ce domaine. Par ailleurs, étant encore peu étudiée à ce jour, il n'existe pas, à notre connaissance, une définition largement acceptée ou du moins un consensus sur les principales composantes de la pensée fonctionnelle. Le premier objectif de ce mémoire consiste donc à proposer une caractérisation de la pensée fonctionnelle qui se distingue d'une part par le fait qu'elle envisage cette pensée en elle-même (sans la réserver au domaine algébrique) et d'autre part par son application qui s'étend au développement précoce de la pensée fonctionnelle, c'est-

à-dire à son développement avant l'introduction formelle du concept de fonction en tant qu'objet d'apprentissage.

À l'aide de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle, nous souhaitons analyser des manuels scolaires afin de déterminer leur potentiel pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle, c'est-à-dire avant l'apparition du concept de fonction comme objet explicite d'apprentissage. Notre hypothèse est qu'à son insu, l'élève pourrait être initié à des raisonnements fonctionnels et à l'utilisation de concepts fonctionnels par la diversité des contextes que les situations d'apprentissage des manuels scolaires proposent. Dans ce projet de recherche exploratoire, nous voulons donc vérifier si les élèves du Québec ont des occasions de développer leur pensée fonctionnelle au primaire, même s'il ne s'agit pas d'une prescription ministérielle. Nous nous proposons de répondre à la question suivante : quel est le potentiel des situations d'apprentissage proposées par les manuels scolaires québécois pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle ?

Pour créer notre propre caractérisation de la pensée fonctionnelle, nous nous sommes appuyés sur quatre piliers indispensables : la manière de voir la pensée et l'activité selon Radford (2011, 2013, 2015); la manière tridimensionnelle d'opérationnaliser la pensée selon certains membres de l' Observatoire International de la Pensée Algébrique (Squalli, Larguier, Bronner et Adihou, accepté); les quelques définitions de la pensée fonctionnelle trouvées dans les recherches et le cadre conceptuel du concept de fonction. Pour nous, la pensée fonctionnelle est donc une manière de penser dans des activités faisant intervenir la notion de fonction (activités fonctionnelles) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction.

Pour analyser les situations d'apprentissage des manuels scolaires de manière objective, nous avons ensuite pris nos assises dans la théorie anthropologique du didactique de Chevallard puisqu'elle fournit notamment les instruments pour la modélisation de l'activité mathématique (Bosch et Chevallard, 1999). Ainsi, à l'aide de l'analyse praxéologique, nous avons pu concrètement dégager le potentiel des situations d'apprentissage d'un manuel scolaire pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle.

L'analyse du manuel scolaire a donné lieu aux principaux résultats suivants. D'abord, 80 situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles ont été identifiées, ce qui indique que l'étude des relations fonctionnelles permet une contextualisation des apprentissages intéressante. D'ailleurs, nous avons pu constater que l'activité de modélisation fonctionnelle était régulièrement sollicitée pour contextualiser des données dans le module *Jeux de nombres* dont la finalité est celle de l'apprentissage de stratégies de calcul efficace. Or, même si seulement 18 situations d'apprentissage sont accompagnées de techniques de résolution fonctionnelles, nous croyons qu'elles ne sont pas négligeables. En effet, plutôt que de privilégier des approches axées sur l'arithmétique, ces techniques ouvrent la porte au développement précoce de la pensée fonctionnelle alors qu'il ne s'agit pas d'une prescription ministérielle. En particulier, les activités de généralisation fonctionnelle sont exploitées, une fois sur deux, par des techniques mettant en valeur la relation de dépendance fonctionnelle entre les quantités variables. De plus, elles axent la recherche de la régularité par l'étude de la covariation ou de la correspondance. Elles initient ainsi les élèves à observer une table de valeurs de diverses manières afin de découvrir des régularités.

Au final, nous concluons que le manuel scolaire que nous avons étudié a le potentiel de favoriser le développement précoce de la pensée fonctionnelle chez les élèves du troisième cycle du primaire au Québec. Les différentes composantes de la pensée fonctionnelle étant bien mises de l'avant dans les techniques suggérées par les auteurs, il existe ainsi une diversité des opportunités pour le développement de cette pensée. De plus, comme plusieurs registres de représentation sémiotiques sont mis à profit dans les activités fonctionnelles, les élèves du primaire développent peu à peu un langage qui leur sera bénéfique à bien des égards, surtout lors de l'apparition du concept de fonction comme objet explicite d'apprentissage.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche, le professeur Hassane Squalli, sans qui je n'aurais peut-être pas envisagé la poursuite de mes études en didactique. Merci pour votre disponibilité, votre soutien constant et votre implication dans tous les volets de mon développement professionnel. Merci d'avoir cru en mon projet un peu fou et de m'avoir poussé à le développer malgré les nombreuses embuches rencontrées. Merci également au professeur Alain Bronner, codirecteur de ce projet, pour votre expertise et nos échanges sur la TAD. Je tiens également à remercier le professeur Adolphe Adihou, membre externe de mon jury, qui m'a fourni de bonnes pistes de réflexion à la suite de la soutenance de mon projet de recherche.

À Karissa Leduc et Audrey Bélanger, mes deux précieuses alliées qui ont su rendre des périodes de rédaction intenses et des demandes de bourses stressantes plus douces. Merci pour votre soutien, votre écoute et vos commentaires sur mon projet de recherche qui était pourtant si différent des vôtres.

Un merci particulier à Véronique Plourde et Karelle Bergeron-Gauthier, les deux lectrices et correctrices officielles de ce mémoire. Je ne saurais comment vous remercier pour toutes les heures passées à décortiquer mes nombreuses ébauches et à les commenter sans faille, version après version.

À Tim, sans qui tout ce processus aurait été encore plus ardu, un énorme merci. Merci de croire en moi et de me soutenir dans mes projets toujours un peu trop ambitieux. Merci pour tes encouragements, ta patience et les nombreuses heures passées à tenter de comprendre mon projet. Tu es tout simplement un homme merveilleux. Je glisse ici un merci tout particulier à notre fils, Édouard, qui est né quelques jours après mon dépôt. Je garde précieusement dans mon cœur et ma mémoire mes derniers mois de rédaction pendant lesquels tu m'as accompagné par de nombreux petits coups de pied d'encouragement.

Merci à mes parents, Diane, Gilles et Pierre, et à ma sœur Claudine pour leurs encouragements constants et leur écoute. Merci d'avoir cru en moi et de m'avoir soutenu dans tous les moments de doute. Merci de me pousser à toujours dépasser mes limites, mais aussi de me ramener sur Terre de temps à autre.

Finalement, merci au Conseil de Recherche en Sciences Humaines (CRSH) pour le soutien financier accordé pour ce projet.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES

NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
OIPA	Observatoire International de la Pensée Algébrique
PFÉQ	Programme de formation de l'école québécoise

INTRODUCTION

Les concepts mathématiques, conjugués selon de multiples combinaisons par la pensée humaine, ont depuis toujours servi à comprendre et à décrire notre monde et les phénomènes qui le composent. C'est entre autres en s'imprégnant de la rigueur de la mathématique, en se dotant de son langage et en prenant plaisir à exercer divers types de raisonnements que se forge un esprit mathématique critique, logique et créatif. En plus d'être riche en elle-même, la mathématique fournit les outils pour modéliser des phénomènes dans de nombreux secteurs d'activités comme la physique, l'économétrie, l'astronomie, la finance, l'ingénierie, etc. Il n'est donc pas surprenant que l'apprentissage de cette discipline ait toujours eu une place prédominante dans l'histoire. Or, le *Programme de formation de l'école québécoise* vise non seulement l'acquisition de compétences mathématiques, mais plutôt le développement de la pensée mathématique (Gouvernement du Québec, 2006).

Notre recherche s'inscrit dans les travaux en didactique des mathématiques et plus particulièrement dans ceux portant sur le développement de l'une des formes de la pensée mathématique. Plus précisément, nous nous intéressons au développement précoce de la pensée fonctionnelle, c'est-à-dire, dès le primaire bien avant l'introduction de la notion de fonction comme objet explicite d'apprentissage au secondaire. Nous définissons brièvement cette dernière comme une manière typique de penser lors d'activités mathématiques mettant en jeu des relations fonctionnelles.

Afin de mieux comprendre la pensée fonctionnelle, le mémoire présenté offre une caractérisation de la pensée fonctionnelle. À l'aide de cette caractérisation et de l'analyse praxéologique, cette recherche a pour but de déterminer le potentiel des situations d'apprentissage proposées dans les manuels scolaires pour le développement précoce d'une pensée fonctionnelle chez les élèves du primaire.

Dans notre premier chapitre, nous exposons les enjeux relatifs au développement de la pensée fonctionnelle pour la formation du citoyen. Nous présentons également les principales recherches ayant porté sur la pensée fonctionnelle tout comme sa place dans les différents programmes de formation. Nous insistons notamment sur l'importance de s'intéresser à son développement précoce en dehors du cadre algébrique. Dans notre deuxième chapitre, nous présentons d'abord la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard qui nous fournit les fondements théoriques de l'analyse praxéologique que nous utiliserons dans le cadre de cette recherche. Nous exposons ensuite un modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle construite à partir de notre caractérisation de celle-ci et d'une analyse *a priori* de nos activités fonctionnelles. Le troisième chapitre met en lumière les éléments méthodologiques de notre projet de recherche. Des explications relatives à chacune des étapes de notre analyse y sont données. Notre quatrième chapitre porte sur la présentation de nos résultats d'analyse. Ceux-ci sont décrits en fonction des différentes étapes nécessaires à l'analyse praxéologique des situations d'apprentissage du manuel scolaire. Finalement, notre cinquième chapitre porte sur l'interprétation de nos résultats. Nous discutons notamment des implications de ceux-ci au regard de notre question de recherche. Il se termine par l'énonciation des limites de l'étude et de pistes de réflexion pour de futures recherches.

PREMIER CHAPITRE
PROBLÉMATIQUE

Dans ce premier chapitre, nous rappelons que le développement de la pensée mathématique est un fondement essentiel de la formation mathématique, tout particulièrement à l'école primaire. Nous justifions également l'importance de viser le développement de la pensée fonctionnelle en tant que l'une de ses formes essentielles. Nous examinons ensuite l'état de la recherche en didactique des mathématiques en ce qui a trait à la pensée fonctionnelle pour mieux cerner les enjeux qui existent à ce jour à son sujet. Nous mettons notamment en lumière l'importance de s'intéresser à son développement précoce en dehors du cadre algébrique. Finalement, nous regroupons ces éléments pour l'articulation de notre question de recherche.

1. LA FINALITÉ DE LA FORMATION MATHÉMATIQUE : LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE

Pour répondre aux besoins des sociétés du 21^{e} siècle qui ont bien évolué depuis les 50 dernières années, les orientations de plusieurs programmes de formation se sont transformées et elles mettent dorénavant l'accent sur le développement de la pensée mathématique. En effet, pour soutenir la formation de citoyens réfléchis et responsables, les curriculums se doivent d'être suffisamment riches pour permettre aux élèves de comprendre d'importants concepts mathématiques et les procédures qui leur sont associées (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000). En particulier, dans les programmes de mathématique de l'école primaire et secondaire, l'une des finalités est la formation du citoyen. En ce sens, la formation mathématique doit favoriser, au-delà d'une compréhension des concepts mathématiques, le développement intellectuel des élèves et l'affinement de leur pensée. C'est à travers toute leur formation mathématique que les élèves améliorent notamment leur intuition, leur créativité et leurs habiletés à prendre des décisions, ce qui favorise leur insertion dans une société en plein essor (Gouvernement du Québec, 2016).

Le système d'enseignement du Québec s'allie à cette tendance en plaçant la pensée mathématique comme l'une des finalités de la formation mathématique. En privilégiant une approche par compétences, le *Programme de formation de l'école québécoise* (PFÉQ) souhaite fournir à l'élève des ressources pour établir un rapport aux savoirs et former sa pensée, en particulier sa pensée mathématique (Gouvernement du Québec, 2006). Dans les documents officiels, c'est notamment par l'articulation des trois compétences disciplinaires (résoudre une situation-problème, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du langage mathématique) que se forge cette pensée (*Ibid.*).

Dans les programmes et dans les recherches en didactique des mathématiques, la pensée mathématique est souvent traitée et observée à travers l'une de ses différentes formes. On parlera entre autres de la pensée algébrique, de la pensée géométrique ou encore de la pensée statistique qui se rattachent à des domaines de contenus, ou encore de la pensée axiomatique ou de la pensée logique qui sont d'ordre plus transversal. À titre d'exemple, dans ses documents officiels, le PFÉQ énonce cinq formes de la pensée mathématique qui se rattachent respectivement aux cinq domaines de contenus de la formation secondaire : la pensée arithmétique, la pensée algébrique, la pensée géométrique, la pensée statistique et la pensée probabiliste (Gouvernement du Québec, 2016). Or, malgré son potentiel important, l'une des formes de la pensée mathématique reste dans l'ombre : la pensée fonctionnelle.

2. LA PENSÉE FONCTIONNELLE

2.1 Son importance en tant que l'une des formes de la pensée mathématique

Porter un regard sur la pensée fonctionnelle peut être intéressant à bien des égards. En premier lieu, les fonctions occupent une place fondamentale dans divers secteurs d'activités et leur utilisation surpasse les frontières du domaine de la mathématique. Pensons par exemple à la fonction exponentielle utilisée quotidiennement par les institutions financières ou encore aux fonctions trigonométriques qui modélisent le mouvement des ondes en physique. Pour Freudenthal (2002), la modélisation fonctionnelle nous permet de comprendre et de décrire notre monde saturé de changements puisque c'est par elle que sont traduits notamment les liens de dépendance, la covariation et la correspondance entre deux ou plusieurs quantités variables. Il n'y a donc pas que les carrières mathématiques qui nécessitent une mobilisation et une bonne compréhension du concept de fonction. À cet effet, Stölting (2008) avance que « la capacité de gérer des situations fonctionnelles et de prendre des décisions fondées est une condition nécessaire pour être un citoyen constructif, impliqué et réfléchi » (p. 7). En second lieu, la pensée fonctionnelle a la particularité très intéressante de ne pas être rattachée à un domaine de contenus particuliers, mais plutôt à un concept fondamental et transversal : celui de fonction. Elle peut donc se déployer et se développer dans une variété d'activités mathématiques qui utilisent, de manière explicite ou non, le concept de fonction ou l'une de ses composantes. Il n'est donc pas étonnant que la notion de fonction soit au cœur de l'enseignement de la mathématique pour tous. La pensée fonctionnelle a ainsi le potentiel de ne pas être restreinte au domaine de la mathématique et d'enrichir la formation d'un citoyen sur différents plans.

Bien qu'étant important, le concept de fonction est complexe et les difficultés des élèves à son égard sont bien connues (Sierpinska, 1992). En outre, au niveau secondaire, les élèves arrivent difficilement à établir des liens entre les différents registres de représentation de la fonction (*Ibid.*) ou à représenter graphiquement la covariation entre deux grandeurs provenant d'une situation réelle (Carlson, 1998). De plus, selon Eisenberg (1992) ces difficultés ont de grandes répercussions sur la compréhension du concept de fonction des étudiants qui poursuivent leur formation aux études supérieures : « it is literally impossible to master higher mathematics in any intellectually honest way without a firm and deep understanding of functions » (p. 158). Dans leur étude, Carlson, Jacobs, Coe, Larsen et Hsu (2002) exposent à leur tour que les étudiants entrent à l'université avec une faible compréhension des fonctions et qu'ils éprouvent de la difficulté à modéliser des relations fonctionnelles à partir de leur aspect de covariation. Bien évidemment, l'organisation d'un programme cohérent du préscolaire à la fin du secondaire n'est pas chose simple. Bien que les fonctions aient le potentiel d'être un concept unificateur et transversal pour tous les domaines de la mathématique, plusieurs pays se questionnent quant à la façon optimale de l'introduire dans les programmes (Denbel, 2015). À travers le monde, on observe une tendance à désormais organiser les programmes en fonction des diverses formes de la pensée mathématique. Cette tendance est notamment influencée par les travaux réalisés dans le cadre d'*Early Algebra*, un courant qui réfère à la fois à un domaine de recherche, une approche curriculaire et un domaine de formation des enseignants (Squalli, 2015). En particulier, les pistes proposées par *Early Algebra* mettent en lumière des stratégies pour bonifier les contenus enseignés au primaire afin de favoriser le développement d'une pensée algébrique sur tout le curriculum primaire et secondaire. L'organisation d'une trajectoire d'apprentissage visant le développement d'une pensée fonctionnelle pourrait aider à pallier les diverses difficultés qu'entraine le concept de fonction en plus de favoriser l'apprentissage et la compréhension approfondie de ce concept. De plus, son développement précoce, sur lequel nous insisterons plus loin, pourrait permettre d'approfondir les raisonnements fonctionnels, d'établir un meilleur rapport aux concepts fonctionnels et d'améliorer la manière de communiquer et de représenter les fonctions. De telles réorientations étant souvent influencées par les recherches didactiques, il importe de poser un regard sur l'état des connaissances entourant la pensée fonctionnelle.

2.2 La place de la pensée fonctionnelle dans les recherches

Au-delà des programmes, la mise à l'avant de la pensée mathématique s'observe dans les recherches en didactique des mathématiques. Entre autres, des groupes de travail sur la pensée mathématique se sont mobilisés dans les congrès internationaux de l'*Espace mathématique Francophone* (EMF) depuis 2009 et le courant *Early Algebra,* qui promeut le développement précoce de la pensée algébrique, continue de prendre de l'ampleur à l'international (voir à cet effet les travaux des groupes de travail des congrès de l'*International Congress on Mathematical Education* (ICME) depuis 2000). Malgré cet engouement pour la pensée mathématique et ses diverses formes, très peu de chercheurs se sont intéressés à la pensée fonctionnelle. Pourtant, déjà, en 1929, Georges faisait mention de la place indéniable de la pensée fonctionnelle pour la formation à la mathématique :

> In view of the preeminence of functional thinking, and the availability of the various mathematical methods for the interpretation, representation, generalization and application of functional relationships to make possible the acquisition of correct habits of functional thinking we are led to believe that this is the primary end of mathematical instruction. (Georges, 1929, p. 608)

L'intérêt porté à la pensée fonctionnelle et l'identification de son importance pour la formation mathématique ne datent donc pas d'aujourd'hui. Mais est-il réaliste de souhaiter promouvoir son développement? Comment et quand serait-il souhaitable d'introduire la pensée fonctionnelle dans la formation mathématique? Pour tenter d'apporter une réponse à ces questions, établissons l'état des connaissances sur la pensée fonctionnelle en décrivant plus en profondeur les quelques études recensées.

Pour Tanışlı (2011), la pensée fonctionnelle ne contribue pas seulement à favoriser la compréhension du concept de fonction, mais également au développement de compétences algébriques. À cet effet, elle mentionne que la pensée fonctionnelle « involves focusing on the relationship between two (or more) varying quantities and such thinking facilitates the studies on both algebra and the notion of function » (p. 206). Dans sa recherche de 2011 ayant été réalisée auprès d'élèves de cinquième année, Tanışlı s'intéressait plus particulièrement au développement de la pensée fonctionnelle à travers des activités portant sur la fonction linéaire représentée par une table de valeurs. Pour cette auteure, les indicateurs de la présence d'une pensée fonctionnelle sont la mobilisation des concepts suivants : la covariation, la correspondance et la variable. Les conclusions de sa recherche confirment l'hypothèse selon laquelle les élèves peuvent découvrir la relation de correspondance entre les variables et réfléchir en termes de covariation (*Ibid.*). De plus, elle a pu constater une évolution dans l'utilisation des registres de représentation mobilisés par les élèves. En effet, alors que les relations trouvées par les élèves étaient initialement représentées par des phrases, une écriture semi-symbolique (c'est-à-dire des expressions dans lesquelles des variables ou des opérations étaient substituées par leur symbole) a ensuite émergé chez certains élèves. Pour cette auteure, le développement de la pensée fonctionnelle est possible dès le primaire et pour favoriser la découverte d'une relation fonctionnelle, il est important d'encourager les élèves à varier leurs perspectives.

Dans sa thèse, Stölting (2008) cherche quant à lui à évaluer de quelle manière les élèves allemands et français de 10 à 16 ans développent leur pensée fonctionnelle et sont en mesure de l'utiliser après avoir été formellement introduits à la notion de fonction. Il mentionne notamment l'importance de travailler l'analyse qualitative des variations et la maîtrise des accroissements des différents types de fonctions pour favoriser une conceptualisation riche du concept de fonction et de la covariation (*Ibid.*). Cet auteur est l'un des seuls à avoir tenté de construire une définition de la pensée fonctionnelle. Pour lui,

> [l]a pensée fonctionnelle désigne la manière typique de penser lors du travail sur des dépendances fonctionnelles. Elle se traduit entre autre (sic.) par les compétences suivantes :
> 1) Les relations fonctionnelles entre des grandeurs peuvent être détectées, décrites, produites et reproduites dans toutes les représentations usuelles.
> 2) Des hypothèses sur la nature de la relation, spécialement sur l'influence de changements dans une variable, peuvent être faites, testées et révisées, si besoin est. (p. 12)

Cette définition sera utilisée dans notre chapitre 2, alors que nous proposerons notre propre caractérisation de la pensée fonctionnelle.

Les études de Tanışlı (2011) et de Stölting (2008) sont, à notre connaissance, les seules à avoir observé la pensée fonctionnelle en dehors du cadre algébrique. Dans les dernières années, la plupart des rares études portant sur la pensée fonctionnelle se sont en effet inscrites dans le mouvement *Early Algebra*. Or, les études ayant utilisé la pensée fonctionnelle dans le cadre de ce mouvement sont particulièrement importantes puisqu'elles ont servi à mettre en évidence une manière d'utiliser les relations fonctionnelles pour le développement de la pensée algébrique et de promouvoir l'étude des fonctions à tous les niveaux d'étude, du préscolaire à la fin du secondaire (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey et Newman-Owens, 2015). Cette connexion significative à un domaine de recherche imminent fait de la pensée fonctionnelle un objet de recherche d'actualité (*Ibid.*). Même si notre intérêt n'est pas d'inscrire notre recherche dans le courant *Early Algebra*, il importe d'observer plus formellement les éclairages que leurs résultats apportent sur notre sujet.

2.2.1 La pensée fonctionnelle comme objet d'Early Algebra

L'intérêt de la mobilisation de la pensée fonctionnelle pour le développement de la pensée algébrique peut être expliqué par les liens étroits existants entre les fonctions et le domaine algébrique. Pour Kaput (2008), l'algèbre se définit à l'aide de trois branches dont l'une d'elles (la deuxième) concerne l'étude des fonctions, des relations et de la variation : « The second strand involves generalizing of a fairly particular kind, basically towards the idea of function, where expressing the generalization can be thought of as describing systematic variation of instances across some domain » (p. 13). C'est également avec l'algèbre qu'il est possible de symboliser la généralisation des régularités (*Ibid.*) étudiées majoritairement au primaire. Pour Blanton *et al.* (2015), les travaux d'*Early Algebra* ont servi à mettre l'accent sur le développement précoce de la pensée algébrique, mais aussi à revoir l'importance de l'étude des fonctions dès le primaire pour favoriser l'apprentissage de l'algèbre au secondaire. Pour elles, la pensée fonctionnelle et la pensée algébrique se rejoignent par leur aspect de généralisation, de représentation, de justification et de raisonnement sur les relations mathématiques. De même, Blanton et Kaput (2004) mentionnent que l'une des formes du raisonnement algébrique implique la mobilisation de la pensée fonctionnelle. Ainsi, la pensée fonctionnelle obtient définitivement sa place dans les recherches d'*Early Algebra* puisqu'elle rejoint l'algèbre et la pensée algébrique lorsque l'activité algébrique implique de manière implicite ou explicite la notion de fonction. Plus précisément, dans leur étude de 2015, Blanton et ses collaboratrices, se sont intéressées à la caractérisation de niveaux de sophistication de la réflexion des élèves de première année au regard de la généralisation algébrique des relations fonctionnelles. Pour elles, le travail sur les relations fonctionnelles est un moyen privilégié pour le développement de la généralisation algébrique qu'elles considèrent comme une composante essentielle de la pensée algébrique. Cette étude ne porte donc pas directement sur la pensée fonctionnelle, mais plutôt sur la pensée algébrique chez les élèves alors qu'ils généralisent des relations fonctionnelles. À partir d'une séquence d'enseignement échelonnée sur huit semaines, des scénarios étaient proposés aux élèves afin de les faire réfléchir sur les relations fonctionnelles existantes entre deux quantités covariantes. Ils devaient, par exemple, décrire la relation entre le nombre de personnes et le nombre total d'oreilles de ces personnes puis tenter de la représenter dans une table de valeurs. Au départ, les auteures croyaient que les élèves n'allaient voir qu'une régularité dans les valeurs de la variable dépendante sans concevoir la relation de cette dernière avec la variable indépendante. Elles ont cependant été surprises de constater que certains élèves ont observé directement la relation fonctionnelle entre les variables et que plusieurs atteignaient ce niveau de sophistication au fil de la séquence d'enseignement. Selon elles,

> the results of our study call into question a long-held assumption in elementary school mathematics that children cannot begin thinking of functional relationships from the earliest grades and must instead have lenghty experiences with recursive patterns before they can consider relationships between covarying quantities (Blanton *et al.,* 2015, p 544)..

Pour nous, ces résultats de recherche indiquent que, non seulement plusieurs situations fonctionnelles associées à des contextes de la vie réelle sont accessibles pour les élèves du primaire, mais également que le développement de la pensée fonctionnelle peut se faire dès la première année du primaire.

Dans un même ordre d'idées, pour Blanton et Kaput (2004), l'une des formes que prend le raisonnement algébrique[1] est la pensée fonctionnelle puisque les fonctions permettent de représenter la généralisation d'une relation entre deux quantités variables. À partir d'une situation fonctionnelle (décrire la relation entre un nombre de chiens et le nombre total de yeux et de queues), des élèves, de la maternelle à la 5e année du primaire, ont été en mesure d'utiliser divers registres de représentation pour traduire la situation. En effet, en première année, les élèves utilisaient des tables de valeurs et des dessins. Pour leur part, les élèves de troisième année étaient en mesure d'utiliser des symboles pour représenter les quantités variables. De plus, « [b]y 3rd-grade and beyond, students seemed fairly sophisticated in their ability to attend to how two quantities varied simultaneously and to symbolize this relationship as a functional correspondance » (*Ibid.,* p. 141). Ainsi,

[1] Dans leur texte de 2004, Blanton et Kaput utilisent indistinctement les expressions raisonnement algébrique et pensée algébrique. Nous ferons pour notre part une distinction entre raisonnement fonctionnel et pensée fonctionnelle dans notre cadre de référence.

les résultats de cette étude nous indiquent que les élèves du primaire peuvent développer leur conception de la covariation et de la correspondance. De plus, ils sont en mesure d'utiliser divers registres de représentation pour traduire une situation fonctionnelle, même s'ils ne disposent pas du langage algébrique formel.

Carraher, Schliemann, Brizuela et Earnest (2006), ont, pour leur part, étudié la pertinence de considérer les opérations arithmétiques d'addition et de multiplication comme des fonctions additives et multiplicatives et ainsi d'utiliser la pensée fonctionnelle pour renforcer la compréhension de l'arithmétique. « We view the introduction of algebra in elementary school as a move from particular numbers and measures toward relations among sets of numbers and measures, especially functional relations » (*Ibid.*, p. 88). Les résultats de leur recherche indiquent que les élèves de huit et neuf ans peuvent comprendre la fonction additive, tout en utilisant correctement des expressions comme $n \rightarrow n + 3$. Dans ce cas, l'addition n'est pas considérée comme une relation binaire, mais bien comme une relation une-aire : l'opérateur + 3 (ajouter 3). Ils concluent que de donner aux fonctions un rôle majeur dans le programme de mathématique du primaire serait bénéfique étant donné que ce concept faciliterait l'intégration de l'algèbre puisque les opérations arithmétiques peuvent être traitées comme des fonctions dès le départ (*Ibid.*). Ainsi, les situations fonctionnelles, souvent utilisées pour le développement des compétences arithmétiques, pourraient également être utilisées pour le développement de la pensée fonctionnelle.

L'étude de Warren, Cooper et Lamb (2006) a, pour sa part, permis de vérifier que les élèves peuvent développer leur pensée fonctionnelle dès le primaire. Leur expérimentation, réalisée auprès d'élèves de quatrième année, leur a en effet permis d'explorer le développement de la pensée fonctionnelle des élèves à travers l'étude de la relation de dépendance entre deux quantités variables. Les problèmes proposés aux élèves exposaient les valeurs la variable indépendante et celles de la variable dépendante observables à l'intérieur de tables de valeurs. Bien que les auteurs n'expriment pas le lien explicite de leur recherche avec *Early Algebra*, leurs conclusions insistent sur l'apport de la pensée fonctionnelle sur le développement de la pensée algébrique : « if students are able to think functionally and use this understanding in developing algebraic generalization, this thinking will underpin the ease of development of more complex reasoning that is linked to more sophisticated algebraic thinking » (*Ibid.,* p. 221).

La description des études sur la pensée fonctionnelle réalisées dans le cadre de *Early Aglebra* montre bien l'intérêt de favoriser le développement de la pensée fonctionnelle pour le développement des compétences algébriques, en particulier puisque l'étude des fonctions constitue une facette importante de l'apprentissage de l'algèbre (Kaput, 2008). De plus, elles nous permettent de constater que les élèves peuvent développer cette forme de pensée mathématique dès le primaire. *Early Algebra* s'avère donc un contexte très intéressant pour l'étude précoce de la pensée fonctionnelle.

Qu'elles soient ou non réalisées dans le cadre du mouvement *Early Algebra*, les études sur la pensée fonctionnelle exposées nous montrent que, malgré les avantages qu'apporte le développement de la pensée fonctionnelle, les recherches à son sujet restent peu nombreuses, surtout en comparaison avec celles sur la pensée algébrique. Malgré tout, elles ont permis de mettre en évidence deux facettes du développement de la pensée fonctionnelle qui nous apparaissent fondamentales : l'importance de son développement précoce et la portée transversale de son développement qui peut et doit dépasser les frontières du domaine de l'algèbre.

2.3 L'intérêt pour la pensée fonctionnelle précoce

Depuis quelques années, le mouvement *Early Algebra* a montré les avantages du développement précoce de la pensée algébrique sur l'apprentissage de l'algèbre. À l'image de ce mouvement, il est possible de croire qu'un développement précoce de la pensée fonctionnelle, c'est-à-dire avant l'apprentissage formel du concept de fonction pourrait avoir plusieurs avantages. En effet, nous avons vu précédemment que l'apprentissage du concept de fonction amène son lot de difficultés. Suivant les traditions des programmes précédents, les fonctions sont généralement introduites assez tardivement dans le cheminement scolaire. Par exemple, dans le programme québécois, les fonctions apparaissent comme objet explicite d'apprentissage à la première année du deuxième cycle du secondaire (élèves de 15-16 ans). Or, historiquement, les fonctions étaient réservées aux niveaux d'étude élevés puisqu'il était de perception générale que leur compréhension nécessitait un niveau d'abstraction et de pensée formelle atteignable seulement à partir d'un certain âge (Blanton *et al.,* 2015). Cette introduction tardive dans les programmes peut sembler brusque et abstraite, ce qui, selon Warren et Cooper (2005), peut expliquer en partie les difficultés rencontrées par les élèves au regard du concept de fonction. De plus, en 1994, Thompson soulignait l'importance des apprentissages variés qui précèdent le concept de fonction et qui favorisent une compréhension profonde de ce dernier :

> If we have learned anything in mathematics education research it is that a person's thinking does not respect topical boundaries. When analyzing students' concepts of function, we need to keep in mind that the imagery and understandings evoked in students by our probing is going to be textured by their pre-understandings of such things as expressions, variables, arithmetic operations, and quantity (p. 1).

Ainsi, avant l'introduction du concept de fonction en tant qu'objet explicite d'apprentissage, du travail peut être fait sur ses concepts précurseurs, notamment sur le concept de variable, la relation de dépendance entre deux quantités variables et sur les différents registres de représentation. Les études réalisées dans le cadre d'*Early Algebra* ont permis de promouvoir l'étude des fonctions à tous les niveaux d'étude, du préscolaire à la fin du secondaire (Blanton *et al.,* 2015), et de vérifier que les élèves du primaire peuvent étudier des relations fonctionnelles et discuter de leur aspect de covariation et de correspondance. Le développement de la pensée fonctionnelle peut ainsi être amorcé bien avant l'apparition du concept de fonction dans le curriculum. Donner un rôle plus important au développement de la pensée fonctionnelle dès le primaire pourrait avoir plusieurs avantages, notamment celui de faciliter le développement de la pensée algébrique (Carraher *et al.,* 2006). Pour Warren et Cooper (2005), afin de favoriser une transition fluide vers le concept de fonction, le développement de la pensée fonctionnelle devrait se faire de manière graduelle et sur une longue période de temps. Ainsi, celui-ci ne doit plus être réservé au niveau secondaire puisqu'il constitue une belle voie d'accès de plus en plus exploitée pour favoriser le développement de la pensée mathématique dès les premières années du primaire.

2.4 L'intérêt de s'intéresser à la pensée fonctionnelle en elle-même

Les études sur la pensée fonctionnelle réalisées dans le cadre du mouvement *Early Algebra* ont montré le potentiel du développement de la pensée fonctionnelle pour le développement des compétences algébriques. Toutefois, bien que très intéressantes, celles-ci fixent la pensée fonctionnelle dans le cadre de la pensée algébrique, réduisant ainsi le potentiel des activités fonctionnelles au développement des compétences algébriques. En effet, en mettant l'accent sur le développement de la pensée algébrique, des occasions pourraient-elles être possiblement manquées pour le développement de la pensée fonctionnelle en elle-même notamment puisque les relations fonctionnelles utilisées dans le cadre des travaux d'*Early Algebra* se limitent aux cas où les fonctions en jeu sont de nature algébrique ? Par exemple, dans l'étude de Blanton *et al*. (2015), les relations fonctionnelles utilisées auraient pu permettre d'exploiter les liens de dépendance entre les variables en jeu et la représentation graphique. La lecture des recherches recensées soulève également diverses questions. Par exemple : en plus de l'utilisation des divers registres de représentation utilisés par les élèves, ces derniers étaient-ils en mesure de passer d'un registre à l'autre ? Ou encore : en général, les élèves sont-ils capables de reconnaitre un modèle fonctionnel qui se rapprocherait d'une situation réelle en plus de pouvoir généraliser des relations fonctionnelles à partir de quelques-unes de leurs instanciations ? En bref, l'ouverture que confère le regard algébrique sur la pensée fonctionnelle ne permet peut-être pas de couvrir tout le potentiel de son développement. De plus, certains pourraient argumenter l'inclusion de la pensée fonctionnelle comme faisant partie de la pensée algébrique. Ainsi, avant de poursuivre, il importe d'expliciter notre conception de l'interrelation entre ces deux formes de la pensée mathématique.

2.4.1 La pensée fonctionnelle et la pensée algébrique[2]

Peu de recherches sur la pensée fonctionnelle exposent une définition formelle de celle-ci et encore moins réfèrent à un cadre ou à un modèle explicite de référence. Il n'existe pas non plus, à notre connaissance, un consensus sur ses principales composantes. La pensée fonctionnelle est plus souvent décrite globalement par certains éléments qui la caractérisent. Prenons à titre d'exemple la définition de Blanton et Kaput (2008) :

> We broadly conceptualize functional thinking to incorporate building and generalizing patterns and relationships using diverse linguistic and representational tools and treating generalized relationships, of functions, that result as mathematical objects useful in their own right (p. 8).

Or, pour nous, la pensée fonctionnelle est une manière de penser dans des activités faisant intervenir la notion de fonction (activités fonctionnelles) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction.

Contrairement à la pensée fonctionnelle, bien qu'il n'existe pas une définition de la pensée algébrique faisant l'unanimité, plusieurs chercheurs s'entendent sur ses principales composantes. À cet effet, Squalli (2015) la définit comme une manière de penser dans des activités algébriques, soit des activités faisant intervenir un nombre fini d'opérations (loi de composition interne ou externe, binaires ou n-aires). Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie à travers un ensemble de raisonnements particuliers (tendance à raisonner de manière analytique, tendance à généraliser, etc.), une manière d'approcher les concepts en jeu dans les activités algébriques (tendance à approcher l'égalité comme une relation d'équivalence, tendance à laisser les opérations en suspens, etc.) et à travers un langage particulier (tendance à symboliser et à opérer sur les symboles, tendance à parler du général à travers le particulier, etc.) (Squalli, Larguier, Bronner et Adihou accepté). Son

---

[2] Certaines recherches ont porté sur la pensée relationnelle qui comporte plusieurs liens étroits avec la pensée fonctionnelle entre autres puisque toute fonction est une relation, alors que toute relation n'est pas nécessairement fonctionnelle. Un approfondissement entre ces deux formes de pensée constituera l'un des objectifs de notre projet doctoral.

développement peut être fait sans l'utilisation du langage littéral de l'algèbre, et ce, dès le primaire.

Même s'ils n'apparaissent pas concrètement dans les définitions, les liens entre la pensée fonctionnelle et la pensée algébrique sont importants. Entre autres, reprenant les conclusions des travaux de Blanton, Levi, Crites et Dougherty (2011) et de Kaput (2008), Blanton et ses collaboratrices (2015) exposent cette connexion importante par leurs aspects communs de généralisation, de représentation et de raisonnement à partir de relations mathématiques. De plus, l'étude des fonctions est considérée par Carraher et Schliemann (2007) comme étant une voie d'accès très intéressante à utiliser dans le cadre du mouvement *Early Algebra*. Bien évidemment, le lien entre l'algèbre et les fonctions est important. Les activités faisant intervenir la notion de fonction, activités que nous appelons fonctionnelles, nécessitent régulièrement de faire appel à des compétences algébriques, en particulier pour la traduction des relations fonctionnelles. Cependant, ces dernières ne sont pas mutuellement inclusives. Il est en effet possible d'étudier une fonction sans faire appel à des compétences algébriques ou de résoudre une équation algébrique dans laquelle la lettre représente une inconnue et non pas une variable. Par exemple, la modélisation de la trajectoire d'une balle de golf peut être faite dans le registre graphique, sans recourir à la recherche de son équation formelle.

Malgré cette distinction, les fonctions restent traditionnellement inscrites dans le domaine de contenus *Algèbre* du programme québécois. Cette tendance peut s'expliquer en partie par le fait que les premières fonctions présentées au secondaire sont de nature algébrique. En effet, les fonctions polynomiales, de premier et de second degré ainsi que la fonction hyperbolique sont enseignées en premier et elles sont des fonctions algébriques[i]. D'autres fonctions non-algébriques sont introduites par la suite : les fonctions trigonométriques, la fonction exponentielle et la fonction logarithmique, mais restent tout de même inscrites sous le libellé *Algèbre*.

Ainsi, bien qu'un lien existe entre le concept de fonction et le domaine algébrique, ceux-ci se distinguent à bien des égards. Il en est donc de même en ce qui concerne la pensée algébrique et la pensée fonctionnelle puisque celles-ci se développent lorsque l'activité à l'étude est respectivement algébrique ou fonctionnelle. Nous pouvons exprimer ces liens entre les deux types de pensée ainsi que leurs types d'activités respectives à travers lesquelles elles se déploient par le schéma suivant :

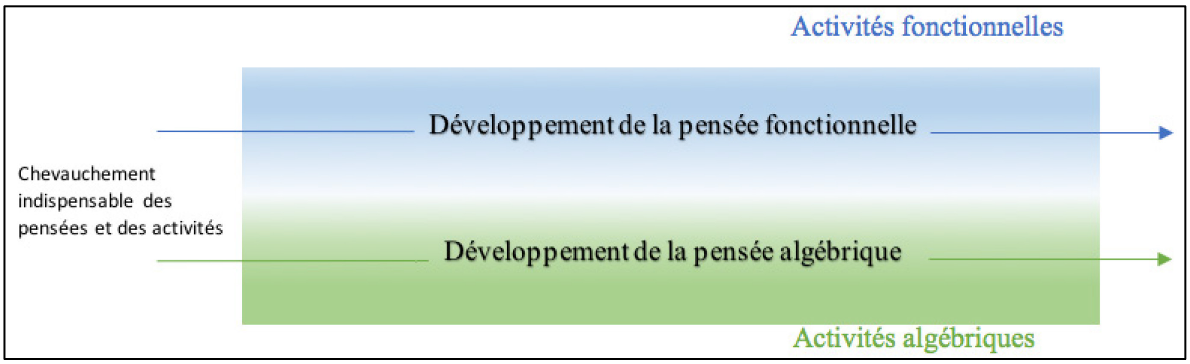


Figure 1 - Liens entre la pensée algébrique et la pensée fonctionnelle

Pour nous, la pensée fonctionnelle est un outil indispensable pour le développement de certaines facettes de la pensée algébrique et vice-versa. Elles ne doivent pas être considérées de manière hiérarchique, mais bien comme évoluant simultanément au fil de l'apprentissage. De cette manière, les raisonnements, les concepts et les modes de représentation qui sont typiquement appris en algèbre ou lors du travail sur les fonctions enrichissent le développement des deux types de pensée et constituent des outils indispensables pour leur co-développement. L'évolution de ces deux types de pensée et le travail fait de manière non exclusive dans chacune des activités constituent, à notre avis, un chevauchement indispensable pour le développement de la pensée fonctionnelle et de la pensée algébrique. Dans le cadre de notre recherche, nous nous intéresserons plus précisément au développement précoce de la pensée fonctionnelle et nous la considérerons pour elle-même, c'est-à-dire en dehors du domaine algébrique.

2.5 Comment caractériser la pensée fonctionnelle ?

Jusqu'à présent, nous avons discuté de l'importance du développement de la pensée fonctionnelle précoce pour enrichir la pensée mathématique, pour favoriser le développement de la pensée algébrique, mais également pour favoriser une transition fluide vers le concept de fonction. Étant peu étudiée, plusieurs facettes de la pensée fonctionnelle sont encore à découvrir. Ainsi, pour pouvoir étudier la pensée fonctionnelle, il importe d'en connaître les principales composantes qui sont actuellement soulevées par les auteurs.

Nous l'avons mentionné précédemment, peu de recherches proposent une définition de la pensée fonctionnelle et encore moins exposent un cadre de référence qui permettrait d'en donner toutes les différentes composantes. De plus, parmi les quelques définitions recensées, la majorité s'inscrit dans le courant *Early Algebra* et offre des définitions qui restreignent la pensée fonctionnelle au cadre algébrique. Par exemple, la définition de Smith (2008) est utilisée dans plusieurs recherches d'*Early Algebra* dont celles de Blanton et Kaput (2004), Tanışlı (2011) et Warren *et al.*, (2006). Pour lui, la pensée fonctionnelle « is representational thinking that focuses on the relationship between two (or more) varying quantities, specifically the kinds of thinking that lead from specific relationships (individual incidences) to generalizations of that relationship across instances » (p. 143). Comme nous souhaitons nous intéresser à la pensée fonctionnelle précoce et à son développement qui ne se restreint pas au cadre de *Early Algebra,* nous devrons d'abord exposer notre propre définition de la pensée fonctionnelle ainsi que les différentes composantes que nous lui portons. Ceci constitue le premier objectif de notre recherche de maîtrise.

2.6 La place de la pensée fonctionnelle dans les programmes

Tel que mentionné, une tendance s'observe dans certains programmes à travers le monde qui s'organisent désormais en fonction des diverses formes de la pensée mathématique. Cette tendance est notamment influencée par les travaux réalisés dans le cadre d'*Early Algebra.* Par exemple, pour le développement de la pensée algébrique, le programme ontarien (Gouvernement de l'Ontario, 2005) propose le domaine *Modélisation et algèbre* dès la première année du primaire et les propositions curriculaires du NCTM de 2000 intègrent la pensée algébrique dès le préscolaire. Pour l'instant, le PFÉQ agence la progression des contenus d'apprentissage selon des domaines de contenus et ne fait pas référence à la stratégie proposée par *Early Algebra*, mais différentes communautés de pratique québécoises travaillent en ce sens (Squalli, 2015).

En Ontario, le domaine *Modélisation et algèbre* traduit l'importance de l'étude des relations[3] et du développement d'une pensée fonctionnelle précoce :

> L'un des thèmes les plus importants des mathématiques est l'étude des régularités et des relations. Cette activité exige que les élèves reconnaissent, décrivent et généralisent des régularités dans des phénomènes du monde réel et qu'ils construisent des modèles mathématiques qui leur permettent de prévoir l'évolution des phénomènes. (Gouvernement de l'Ontario, 2005, p. 10)

De plus, la pensée fonctionnelle est utilisée pour le développement des compétences algébriques dans le document *Mettre l'accent sur le raisonnement algébrique* du Gouvernement de l'Ontario (2008). Ceci traduit bien ce que certains auteurs d'*Early Algebra* mentionnent : la pensée fonctionnelle peut servir de moyen pour enrichir la pensée algébrique.

Pour le NCTM, la pensée fonctionnelle fait également partie intégrante du domaine *Algebra,* qui est présent dès le préscolaire et se décline en sous-domaines faisant explicitement appel à l'étude des relations et des fonctions : *Patterns and Relationships* (maternelle à la 4e année), *Patterns and Functions* (5e à 8e année) et *Algebra and Functions* (9e à 12e année).

Au Québec, la pensée fonctionnelle n'est pas mentionnée dans les documents officiels de manière explicite. De plus, contrairement au programme ontarien et aux propositions curriculaires du NCTM, son développement implicite n'est pas mis en valeur

[3] Toute fonction est une relation, mais toute relation n'est pas nécessairement fonctionnelle.

par un domaine d'apprentissage qui s'étale sur tout le curriculum primaire et secondaire. À notre connaissance, aucune recherche sur la pensée fonctionnelle avant l'introduction formelle du concept de fonction n'a été réalisée dans le contexte québécois. Ceci nous pousse à nous questionner sur les compétences acquises par les élèves québécois avant et après l'introduction du concept de fonction. Sont-ils en mesure de développer une pensée fonctionnelle même s'il ne s'agit pas d'une prescription ministérielle ? Ont-ils déjà des occasions de la développer ? Des recherches sur la pensée fonctionnelle, en particulier au Québec, sont nécessaires.

2.6.1 Le développement implicite de la pensée fonctionnelle dans le programme québécois

Même si ce n'est pas écrit de manière explicite dans le programme québécois, certains apprentissages sont fort probablement réalisés au primaire et au premier cycle du secondaire afin de favoriser l'introduction du concept de fonction. À cet effet nous pouvons comparer le cas de la pensée fonctionnelle à celui de la pensée algébrique puisque pour cette dernière, le PFÉQ du premier cycle du secondaire reconnait que l'élève a été initié à son insu aux préalables de l'algèbre au primaire, à partir des diverses activités mathématiques sur lesquelles il a travaillé (Gouvernement du Québec, 2004). En considérant ceci, les grandes idées qui sous-tendent le concept de fonction peuvent se construire à travers les diverses notions qui lui sont préalables. Par exemple, nous pouvons nommer l'étude des régularités dans les suites de nombres qui commence dès le premier cycle du primaire, ou encore l'étude des situations de proportionnalité et le travail sur les registres de représentation (tables de valeurs, représentation graphique). Ces situations ont ainsi le potentiel de favoriser le développement d'une pensée fonctionnelle.

En plus de potentiellement se développer implicitement à travers certains apprentissages du programme du primaire, la pensée fonctionnelle peut se manifester à travers la diversité des contextes utilisés pour les activités mathématiques. En effet, pour donner un sens aux apprentissages et les rendre plus significatifs pour les élèves, les concepts et les notions mathématiques sont régulièrement placés dans des contextes extramathématiques, souvent inspirés de la vie réelle. Or, les fonctions étant utilisées pour modéliser le changement, la covariation, la correspondance et les liens de dépendance, elles sont implicitement en jeu dans divers contextes de notre quotidien. En effet, que ce soit pour calculer le coût de la facture d'essence en fonction du nombre de litres ou encore pour modéliser les phénomènes économiques, plusieurs situations d'apprentissages recourant à divers contextes mettent en jeu implicitement la notion de fonction. Dans le cadre de cette recherche, une situation sera dite potentiellement fonctionnelle si elle met en jeu de manière implicite ou explicite le concept de fonctions. Or, les situations fonctionnelles sont souvent utilisées dans les activités mathématiques et, comme nous le verrons plus loin, la pensée fonctionnelle se déploie dans des activités fonctionnelles Il est donc raisonnable de penser que les élèves entament le développement de leur pensée fonctionnelle dès le primaire, et ce, même s'il ne s'agit pas d'une prescription officielle du programme.

En conclusion, nous savons que la pensée fonctionnelle se déploie lors d'activités faisant intervenir de manière implicite ou explicite la notion de fonction. Ces activités, réalisées en classe, nous sont en partie rendues disponibles par les manuels scolaires qui nous offrent une vitrine privilégiée sur le travail des enseignants puisqu'ils sont des ressources qui donnent une interprétation du programme en plus de proposer des pratiques possibles d'enseignement (Tavignot, 1995). Pour Lebrun et Niclot (2009), le manuel se retrouve à la jonction entre le curriculum réel et le curriculum formel[4] et il assume une place centrale entre l'enseignement et l'apprentissage. Comme nous souhaitons étudier le potentiel du développement de la pensée fonctionnelle précoce chez les élèves québécois, les manuels scolaires constituent un outil de choix et facile d'accès pour la réalisation de ce projet. En analysant les situations d'apprentissage qu'ils proposent, nous pourrons en effet déterminer si les élèves ont la possibilité de développer une pensée fonctionnelle précoce à partir des activités qu'ils réalisent en classe. Dans le cadre de cette recherche, nous

[4] Pour ces auteurs, le curriculum formel est constitué des contenus prescrits et le curriculum formel correspond à l'ensemble des contenus qui sont réellement enseignés dans la classe (Lebrun et Niclot, 2009).

souhaitons répondre en particulier aux questions suivantes : Les manuels scolaires québécois proposent-ils des situations d'apprentissage favorisant le développement de la pensée fonctionnelle ? Les contextes utilisés mettent-ils de l'avant des relations fonctionnelles qui pourraient être exploitées pour le développement de la pensée fonctionnelle ?

3. QUESTION DE RECHERCHE

L'objectif principal du programme québécois est de favoriser le développement des trois compétences disciplinaires qui sous-tendent la pensée mathématique. Contrairement au programme ontarien et aux standards du NCTM qui mettent de l'avant le développement de la pensée fonctionnelle, le programme québécois n'en fait pas mention de manière explicite. Les recherches en didactique des mathématiques nous indiquent toutefois que les élèves peuvent développer leur pensée fonctionnelle dès le primaire et que son développement peut non seulement favoriser l'apprentissage de l'algèbre, mais également celui du concept de fonction. Dans ce projet de recherche, nous voulons donc vérifier si les élèves du Québec ont des occasions de développer leur pensée fonctionnelle au primaire, même s'il ne s'agit pas d'une prescription ministérielle. Nous nous proposons donc de répondre à la question suivante :

Quel est le potentiel des situations d'apprentissage proposées par les manuels scolaires québécois pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle ?

DEUXIÈME CHAPITRE
CADRE DE RÉFÉRENCE

Dans ce second chapitre, nous présentons les assises conceptuelles de notre recherche. Nous y exposons d'abord les contours du cadre d'analyse que nous exploiterons, celui de l'analyse praxéologique de Chevallard qui s'inscrit dans la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). C'est à partir des fondements théoriques de ce cadre que nous pourrons bâtir notre modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle. Or, établir ce modèle nécessite de travailler en amont du concept de fonction. Il faut en effet réfléchir aux divers raisonnements, concepts et processus fonctionnels précurseurs qui favorisent le développement précoce de cette forme de pensée mathématique. Avant de présenter notre caractérisation opératoire et fondée épistémologiquement de la pensée fonctionnelle, nous exposons les quatre piliers indispensables sur lesquelles elle repose : la manière de voir la pensée et l'activité selon Radford (2011, 2013, 2015); la manière tridimensionnelle d'opérationnaliser la pensée selon certains membres de l'Observatoire International de la Pensée Algébrique (OIPA) (Squalli *et al.,* accepté); les quelques définitions de la pensée fonctionnelle trouvées dans les recherches et le cadre conceptuel du concept de fonction. Finalement, ce chapitre se termine par la présentation de notre analyse *a priori* de nos différentes activités fonctionnelles.

1. LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE DE CHEVALLARD

Ce que Chevallard appelle la théorie anthropologique du didactique tient son origine de la didactique des mathématiques (Bosch et Chevallard, 1999 ; Chevallard, 2010). Elle découle d'un besoin d'une rupture épistémologique entre la science et les mondes socialement construits à l'étude (Chevallard, 2010). Au cœur de la théorie anthropologique du didactique se trouve l'étude des conditions et contraintes de la diffusion aux personnes et aux institutions des savoirs qui seront pensés en termes de praxéologie (*Ibid.*). Elle fournit notamment les instruments pour la modélisation de l'activité mathématique (Bosch et Chevallard, 1999) qui permettent d'étudier les processus de production et de circulation du savoir (Pilet, 2016). Dans le cadre de ce projet de recherche, l'objectif étant d'analyser les situations d'apprentissage de manuels scolaires par les tâches et les techniques qu'elles proposent, les notions de transposition didactique et de praxéologie nous seront particulièrement utiles.

1.1 La transposition didactique

La transposition didactique se préoccupe des conditions et des contraintes de la diffusion des savoirs (Chevallard, 2010). Le « concept de transposition didactique cherche à caractériser les transformations subies par le savoir pour devenir objets d'enseignement » (Tavignot, 1995, p. 34). Elle s'intéresse en fait au décalage qui se trouve entre les savoirs savants (savoirs mathématiques de références), les savoirs à enseigner (savoirs inscrits dans les programmes) et les savoirs enseignés (ce qui est réellement transmis dans les classes) (Tavignot, 1995).

Deux phases sont définies par la transposition didactique. La première relève du passage entre le savoir savant vers le savoir à enseigner et la seconde du passage entre le savoir à enseigner vers le savoir enseigné (*Ibid.*). Pour accéder au travail des enseignants, il est intéressant de s'intéresser à cette seconde phase de la transposition didactique puisque ce sont eux qui interprètent les programmes et leurs commentaires, qui donnent un sens aux notions et qui présentent aux élèves ce qui, selon eux, est important (*Ibid.*). Les manuels sont des ressources que les enseignants peuvent utiliser puisqu'ils donnent à leur tour une interprétation du programme et ils proposent des pratiques possibles d'enseignement (*Ibid.*). Nous situons donc notre recherche dans cette deuxième phase de la transposition didactique puisque nous nous intéresserons aux situations d'apprentissage présentes dans les manuels scolaires.

1.2 L'analyse praxéologique

L'activité mathématique se situe, selon la TAD, dans le bassin de toutes les activités humaines et des institutions sociales (Chevallard, 1998). Elle fait ainsi face au postulat de base de la TAD : « toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot praxéologie » (Chevallard, 1998, p. 1). L'étude de toute activité, notamment l'activité mathématique, peut ainsi être décomposée par le modèle général proposé par la TAD, représentée par le quadruplet [t, τ, θ, Θ]. Selon ce modèle, toute tâche t (appartenant à un certain type de tâches) est accomplie au moyen d'une technique τ qui est rendue intelligible par une technologie θ qui est elle-même justifiée par une théorie Θ (Chevallard, 1997). En plus de ces concepts, nous parlerons de genres de tâches qui regroupent des types de tâches de même nature.

Les praxéologies sont constituées d'un bloc technologico-théorique [θ/Θ] représentant les savoirs en jeu et d'un bloc pratico-technique [t/τ] qui représente le savoir-faire (*Ibid.*). La décomposition de l'activité mathématique en praxéologie permet ainsi d'identifier les tâches, type de tâches et genre de tâches favorisés en une institution *I*. De même, elle permet de porter un regard sur les techniques utilisées puisqu'en une institution donnée, il n'existe en général qu'un petit nombre de techniques qui sont institutionnellement reconnues pour accomplir un certain type de tâches (Chevallard, 1998). Ceci laisse entendre que des techniques peuvent être supérieures à d'autres pour une certaine partie de *T* (*Ibid.*). Or, les techniques s'appuyant sur un bloc technologico-théorique, ceci implique que certains savoirs sont privilégiés pour la résolution de tâches. L'analyse praxéologique devient ainsi un outil précieux pour observer quelles techniques sont mises de l'avant par une institution au détriment de techniques relevant d'un autre savoir.

1.3 Le modèle épistémologique de référence

Pour pouvoir étudier les praxéologies en une institution, il est nécessaire d'avoir une référence qui nous permette d'interpréter l'activité mathématique. Dans son texte de 1993, Gascón mentionne l'importance de posséder un modèle alternatif au domaine d'activité mathématique enseigné qui permet au chercheur d'observer le modèle dominant existant dans l'institution qu'il étudie.

> La recherche en didactique devrait pouvoir expliquer pourquoi un certain modèle implicite existe dans une institution didactique au détriment d'autres modèles possibles ; comment ce modèle implicite agit sur la structure et les fonctions des différents dispositifs didactiques ; et comment les phénomènes qui s'y produisent dépendent des caractéristiques de ce modèle. Elle devrait pouvoir expliquer, par ailleurs, comment la perception de ces phénomènes peut varier suivant les différents modèles du savoir mathématique qu'adopte le chercheur (*Ibid.,* p. 44).

Pour pouvoir étudier la pensée fonctionnelle, un modèle épistémologique de référence doit donc être explicite. Or, à notre connaissance, un tel modèle n'a pas encore été établi. En ce sens, il importe d'exposer notre propre caractérisation de la pensée fonctionnelle et de détailler ses différentes composantes. C'est la réunion de ces éléments en une analyse *a priori* qui nous servira de modèle épistémologique de référence dans le cadre de cette recherche.

2. LES PILIERS DE NOTRE CARACTÉRISATION DE LA PENSÉE FONCTIONNELLE ET DE SES COMPOSANTES

La formulation et l'opérationnalisation de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle prennent appui sur quatre piliers indispensables qu'il importe de présenter : la caractérisation de la pensée et de l'activité mathématique selon Radford (2011, 2103, 2015) ; l'opérationnalisation de la pensée de manière tridimensionnelle comme fait pour la pensée algébrique par certains membres de l'OIPA (Squalli *et al.,* accepté) ; les définitions de la pensée fonctionnelle présentes dans la littérature et le cadre conceptuel du concept de fonction.

2.1 Pilier 1 : la pensée selon Radford

Pour identifier ce que nous entendons par la pensée (mathématique ou fonctionnelle), nous utiliserons d'abord la théorie de l'objectivation telle qu'énoncée par Radford (2011 ; 2013). Cette théorie d'inspiration vygotskienne considère la pensée comme étant sensible et historique. Elle s'oppose aux théories contemporaines qui considèrent que la pensée est un processus interne n'étant pas accessible à l'observation externe (Radford, 2013).

> Il s'agit d'une conception d'après laquelle la pensée est *sensible* et *historique.* Elle est sensible dans le sens où la pensée invoque de manière fondamentale nos sens dans la saisie de ses objets. De ce point de vue, les gestes, la perception, le corps, les signes et les artefacts sont considérés comme des parties constitutives de la pensée. Mais la pensée va au-delà du moi-qui-pense-avec-son-corps-et-ses-sens, car elle est une forme sociale de réflexion et d'action historiquement constituée, générée par la pratique sociale. (*Ibid.,* p. 55)

Chercher à comprendre la pensée revient donc à considérer à la fois la pensée du sujet pensant (la pensée subjective) et la pensée historico-culturelle. Dans le cas de cette recherche, c'est à cette dernière que nous faisons référence lorsque nous parlons de la pensée fonctionnelle. En effet, tout comme pour la pensée mathématique, la pensée fonctionnelle ne peut se réduire à un individu, elle le transcende (Radford, 2015). L'enseignement de la mathématique vise effectivement à développer chez l'élève une manière de réfléchir et d'agir en accord avec ce que Radford (2011) appelle « des formes mathématiques culturelles de pensées constituées historiquement » (p. 66). Ainsi, pour fournir un modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle, il importe de connaître, en premier lieu, les racines historiques du concept de fonction, les nouveaux types de raisonnements qu'il a nécessités et les difficultés à surmonter lors de sa constitution. Les résultats de cette analyse *a priori* seront intégrés à travers les diverses composantes de notre proposition d'un modèle épistémologique de référence qui explore à la fois les types de raisonnements que la pensée fonctionnelle suscite, les concepts connexes qu'elle mobilise et l'articulation entre les divers registres de représentation qu'elle nécessite.

À l'image de ce que Radford mentionne à propos des connaissances, la pensée se déploie en activité et elle n'est que pure possibilité sans celle-ci : « Knowledge is pure possibility and can only acquire reality through activity » (Radford, 2013, p. 8). Les activités servent de médiation entre les connaissances et le fait de connaître (Radford, 2011). L'une des composantes de l'apprentissage consiste ainsi à intérioriser les connaissances à partir d'activités spécialement sélectionnées et agencées pour favoriser la compréhension d'un concept. Ce processus d'intériorisation se fait de concert avec le développement de la pensée qui se constitue et évolue.

Une activité peut avoir divers objectifs selon le regard qui lui est donné. Ainsi, les activités qui pourraient favoriser le développement d'une pensée fonctionnelle pourraient également servir à développer d'autres compétences comme les compétences arithmétiques ou algébriques. Elles pourraient aussi servir à mobiliser un raisonnement proportionnel ou à travailler la généralisation. Comme le mentionne Radford (2011) : « [l]es signifiés culturels font partie d'une structure symbolique, orientent l'activité et lui donnent une certaine forme affectant par là la pensée qui résulte de l'activité ainsi médiatisée » (p. 59). Nous dirons donc qu'une activité fonctionnelle est une activité faisant intervenir la notion de fonction de manière implicite ou explicite, et ce, à travers les différents sens de la fonction. Pour caractériser la pensée fonctionnelle, nous aurons besoin d'exposer à la fois une définition de celle-ci, mais également de présenter les principales activités fonctionnelles dans lesquelles cette pensée se déploie.

2.2 Pilier 2 : l'opérationnalisation de la pensée fonctionnelle de manière tridimensionnelle

Le second pilier sur lequel prend appui notre modèle épistémologique de référence est celui de la structure opérationnelle de la pensée algébrique telle que développée par certains membres de l'OIPA (Squalli *et al.,* accepté). Ainsi, à l'instar de leur modèle, sur le plan opératoire, nous considérons la pensée de manière tridimensionnelle, c'est-à-dire comme 1) un ensemble de raisonnements particuliers, 2) un rapport particulier aux concepts en jeu dans les activités et 3) une manière de communiquer. Ces trois composantes distinctes ne sont pas placées de manière hiérarchique et doivent être considérées comme étant constamment en interrelation. Prenons comme exemple la réalisation d'une activité de modélisation fonctionnelle qui implique de représenter graphiquement la hauteur de l'eau en fonction du temps lors du remplissage à débit constant d'une urne de forme donnée. Faire une telle activité sera empreinte de raisonnements fonctionnels comme la tendance à modéliser et d'un rapport particulier au concept de covariation. Elle impliquera nécessairement certains registres de représentations sémiotiques, qu'ils soient personnels ou institutionnels comme le dessin et le recours à un repère du plan. Ainsi, cette manière de caractériser la pensée de manière tridimensionnelle sera dupliquée dans la constitution de notre modèle épistémologique de référence.

2.3 Pilier 3 : les définitions de la pensée fonctionnelle dans les recherches

Le nombre de recherches offrant une définition de la pensée fonctionnelle est très restreint et, tel que mentionné, la plupart de celles-ci s'inscrivent dans le courant *Early Algebra*. Toutefois, les quelques rares définitions de la pensée fonctionnelle récoltées influencent nécessairement, de près ou de loin, notre modèle épistémologique de référence : ces influences constituent ainsi un troisième pilier fondateur de notre propre définition.

Bien que la plupart des définitions aient déjà été exposées dans la problématique, nous les rappellerons ici. D'une part, pour Smith (2008), la pensée fonctionnelle : « is representational thinking that focuses on the relationship between two (or more) varying quantities, specifically the kinds of thinking that lead from specific relationships (individual incidences) to generalizations of that relationship across instances » (p. 143). Cette définition est utilisée dans plusieurs autres recherches de *Early Algebra* (par exemple : Blanton et Kaput, 2004 ; Tanışlı, 2011 ; Warren *et al.,* 2006) et elle est très intéressante en particulier puisqu'elle s'appuie sur l'importance de la généralisation, de la covariation et de la dépendance qui s'expriment à travers diverses représentations des relations fonctionnelles. Dans un même ordre d'idées, la proposition offerte par Blanton et Kaput (2011) inclut l'idée importante de généralisation de régularités et de relations fonctionnelles qui se fait à travers l'articulation des divers registres de représentations. C'est en faisant ce traitement par la généralisation que les relations fonctionnelles deviennent des objets mathématiques en soi.

> We broadly conceptualize functional thinking to incorporate building and generalizing patterns and relationships using diverse linguistic and

> representational tools and treating generalized relationships, of functions, that result as mathematical objects useful in their own right (*Ibid.,* p. 8).

D'autre part, la définition de Stölting (2008), écrite dans le cadre de sa thèse, met l'accent sur les compétences nécessaires au traitement des dépendances fonctionnelles et à l'aspect de covariation de la fonction :

> La pensée fonctionnelle désigne la manière typique de penser lors du travail sur des dépendances fonctionnelles. Elle se traduit entre autre (sic.) par les compétences suivantes :
>
> 1) Les relations fonctionnelles entre des grandeurs peuvent être détectées, décrites, produites et reproduites dans toutes les représentations usuelles.
> 2) Des hypothèses sur la nature de la relation, spécialement sur l'influence de changements dans une variable, peuvent être faites, testées et révisées, si besoin est. (p. 12)

Les influences de ces définitions ressortent dans la description détaillée des diverses composantes de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle qui inclut, entre autres, la généralisation comme une activité fonctionnelle indispensable et la covariation comme l'un des concepts fonctionnels les plus importants. Cette description détaillée de nos composantes sera faite dans la section suivante.

2.4 Pilier 4 : le cadre conceptuel du concept de fonction

Le quatrième élément indispensable à la construction de notre modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle est bien entendu une analyse épistémologique du concept de fonction. Ce regard épistémologique influence notre cadre de référence par la place importante qu'ont prise, à un moment ou à un autre, l'activité de modélisation et les concepts de variation, de covariation, de dépendance et de correspondance.

Essentiellement, au fil de l'évolution des mathématiques, le concept de fonction est devenu l'un des concepts les plus fondamentaux pour organiser et caractériser les relations mathématiques (Denbel, 2015). L'idée de fonction résulte en effet d'une évolution dans les questionnements portant sur les phénomènes et ses fondements reposent sur l'étude des lois de variation et sur la modélisation de ces lois (Comin, 2005). C'est Leibniz qui introduisit, en 1692, le terme fonction pour la première fois dans un contexte géométrique alors que pour lui, une fonction représentait « des portions de lignes droites qui dépendent d'un point variable sur une courbe, comme la tangente ou la normale » (Houzel, 1997, p. 358). Une définition plus proche de ce que nous connaissons aujourd'hui apparaît dans l'ouvrage *Introduction in Analysis Infinitorum* d'Euler en 1747 (Selden et Selden, 1992) pour qui une fonction est : « une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constants » (Houzel, 1997, p. 358). Il n'apporte toutefois aucune précision quant à ce qu'il entend par “expression analytique” (*Ibid.* ; Sfard, 1992).

Évoluant à travers différentes théories dont celles du calcul infinitésimal de Newton et Leibniz ou encore celles du développement en séries entières de Fournier, le concept de fonction a traversé une série de « définitions de plus en plus abstraites, épurées et formelles » (René de Cotret, 1988, p. 6) qui ont progressivement donné naissance à une conception ensembliste de la fonction. Les idées de covariation et de dépendance qui étaient alors inhérentes au concept ont été remplacées par la correspondance et la logique axiomatique de la fonction (René de Cotret, 1988).

Les divers éléments présentés dans ce bref cadre conceptuel du concept de fonction seront très utiles notamment pour décrire les principales activités fonctionnelles et pour justifier l'importance de chacune des composantes de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle.

3. LA PENSÉE FONCTIONNELLE : UN MODÈLE ÉPISTÉMOLOGIQUE DE RÉFÉRENCE

3.1 Une caractérisation de la pensée fonctionnelle

Les piliers qui ont permis d'établir notre caractérisation de la pensée fonctionnelle ayant été exposés, nous pouvons maintenant présenter notre caractérisation de la pensée fonctionnelle.

La pensée fonctionnelle est une manière de penser dans des activités faisant intervenir la notion de fonction (activités fonctionnelles) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction. C'est une prédisposition de l'esprit, qui, sur le plan opératoire, se concrétise par :

1. Un ensemble de raisonnements particuliers dans ce type d'activité ;
2. Un rapport particulier aux concepts en jeu dans ces activités ;
3. Une manière de communiquer et de représenter.

3.1.1 Les activités fonctionnelles : lieux de déploiement de la pensée fonctionnelle

Nous considérons la pensée et l'activité comme étant les deux faces d'une même médaille. Pour nous, la pensée se déploie donc en activité ce qui implique que la pensée fonctionnelle se déploie lors du travail sur une activité fonctionnelle. Rappelons-le, une activité fonctionnelle est une activité faisant intervenir la notion de fonction de manière implicite ou explicite, et ce, à travers les différents sens de la fonction. Sans viser l'exhaustivité, nous considérons que les activités fonctionnelles essentielles sont : la modélisation fonctionnelle ; la généralisation fonctionnelle et l'analyse et l'étude de relations fonctionnelles. Voici une présentation de chacun de ces types d'activités.

3.1.1.1 La modélisation fonctionnelle (AF-1)

La modélisation est un aspect indispensable de l'activité mathématique. En outre, c'est en cherchant à modéliser le mouvement que la fonction est devenue un objet en lui-même au Moyen Âge (Charbonneau, 1987). De manière générale, la modélisation mathématique est un processus par lequel une situation réelle est analysée pour en retirer les informations permettant de la traiter mathématiquement et d'ainsi étudier la situation idéalisée (Squalli, 2000). Après un traitement mathématique des données, les résultats servent à alimenter la situation idéalisée ou à répondre à la situation réelle (*Ibid.*). La notion de modèle est polysémique et il n'existe pas de définition unique de ce concept (Roy et Hasni, 2014). Or, Roy et Hasni (2014) regroupent les idées de Bachelard (1979), Bunge (1989), Damska (1959) et Giere (2004) pour offrir la définition suivante : « [u]n modèle est une représentation simplifiée d'une entité du monde réel » (p. 352).

Nous dirons qu'une modélisation mathématique est une modélisation fonctionnelle quand le modèle mathématique est une fonction. Nous parlerons alors d'un modèle fonctionnel qui permettra d'offrir une représentation simplifiée d'une relation fonctionnelle complexe du monde réel. Un modèle se construit par le processus dynamique et non linéaire de modélisation (*Ibid.*) ; la modélisation fonctionnelle est ainsi le processus dynamique et non linéaire de construction d'un modèle fonctionnel. Pour construire le modèle fonctionnel, un regard particulier est placé sur la relation entre deux quantités qui covarient, sur leur lien de dépendance et sur la règle de correspondance qui les unie.

La modélisation fonctionnelle est notamment utile pour prédire le comportement de variables en jeu dans une situation de changement ou de covariation. Pour Vollrath (1986), ce sont les activités qui nécessitent de prédire, tester et reconsidérer le lien de dépendance entre deux quantités variables qui forgent la pensée fonctionnelle.

Quelques recherches s'étant intéressées au développement précoce de la pensée fonctionnelle ont utilisé des activités de modélisation fonctionnelle. Par exemple, dans l'étude de Blanton *et al.* (2015), les élèves devaient travailler en petits groupes pour modéliser des contextes fonctionnels. Ils devaient notamment discuter, collecter et organiser des données, tenter de déterminer une relation fonctionnelle et représenter cette relation en mot ou avec une notation symbolique. Deux types de tâches étaient systématiquement à faire par les élèves : générer des données pour un problème donné et organiser les données. Un chercheur était présent pour piloter l'activité et faire cheminer la pensée des élèves. Les questions du chercheur orientaient ensuite les tâches : « Comment as-tu organisé tes données ? Vois-tu une quelconque relation dans ta table de valeurs ? Parle-moi de la relation entre le nombre de bureaux et le nombre de personnes pouvant s'asseoir – que remarques-tu ? [traduction libre] » (*Ibid.*, p. 519).

3.1.1.2 La généralisation fonctionnelle (AF-2)

La généralisation est un processus très important en mathématique. Mason (1994) mentionne même à cet effet que la généralisation est au cœur des mathématiques. Pour Dörfler (1991), la généralisation est un processus sociocognitif qui mène à quelque chose de général. Pour sa part, Mason (1994) mentionne que la généralisation commence dès qu'une régularité est pressentie et qu'elle représente à la fois un processus et un produit. Pour distinguer ces deux appellations, nous utiliserons, comme Squalli (2015), le terme généralisation pour désigner le processus et de généralité pour désigner le produit. Toujours selon cet auteur, trois moments clés fondent la généralisation : pressentir la généralisation (1) ; la formuler (2) et la justifier (3). Généraliser signifie ainsi de « titrer des conclusions valables pour tous les cas à partir de quelques exemples » (Mason, 1994, p. 7). Ces quelques exemples seront appelés, dans le cadre de notre recherche, des instanciations de la ou des quantités variables. Pour nous, la généralisation fonctionnelle commencera lorsqu'une régularité entre quelques instanciations (des couples) des variables est pressentie. Elle se poursuit lorsque l'hypothèse selon laquelle ce qui est observé est valable pour toutes les valeurs d'un certain domaine (établir la relation fonctionnelle) et se termine par la justification de la généralisation.

Encore une fois, certaines recherches ont utilisé des activités de généralisation fonctionnelle pour étudier la pensée fonctionnelle. Par exemple, Blanton et Kaput (2011) ont étudié les réponses des élèves aux tâches de l'activité présentée à la figure 2. Les tâches étaient les suivantes : « find the number of body parts a growing snake would have on day 10 and on day n, where each triangle equaled a body part » (p. 11).

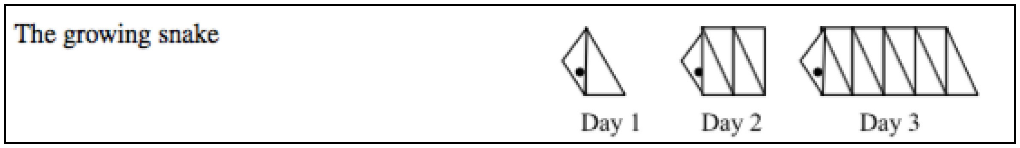


Figure 2 – Activité The growing snake utilisée par Blanton et Kaput (2011)

Pour favoriser la réflexion, l'enseignante avait proposé aux élèves d'utiliser une table de valeurs et de chercher, à travers celle-ci, une relation mettant en jeu les deux quantités variables (jour, nombre de triangles).

3.1.1.3 L'étude d'une relation fonctionnelle (AF-3)

L'une des attentes du NCTM (2000) pour les élèves du primaire est la compréhension des suites, des relations et des fonctions. Certes, pour bien comprendre, par exemple, la fonction quadratique, il faut l'étudier sur diverses facettes et bien cerner à la fois comment les variables en jeu covarient, comment s'établit la relation de correspondance, comment passer de la forme générale de son équation à la forme canonique, etc. Or, pour atteindre une compréhension optimale d'une relation fonctionnelle, il est nécessaire de l'étudier en profondeur et de comprendre ses diverses facettes.

Ainsi, une activité portant sur l'étude d'une relation fonctionnelle porte bien son nom puisqu'elle consiste à étudier une relation fonctionnelle déjà connue. Elle peut, par exemple, servir à établir les caractéristiques d'une fonction linéaire ou encore à travailler la représentation de cette fonction dans divers registres. L'étude d'une relation fonctionnelle se distingue de l'activité de modélisation fonctionnelle et de l'activité de généralisation fonctionnelle puisqu'elle ne se fonde pas sur la recherche de la relation fonctionnelle en jeu : la relation est déjà connue. Pour Stölting (2008), l'une des composantes de la pensée fonctionnelle qui rejoint cette activité fonctionnelle est la suivante : « [d]es hypothèses sur la nature de la relation, spécialement sur l'influence de changements dans une variable, peuvent être faites, testées et révisées, si besoin est » (p.12).

L'étude d'une relation fonctionnelle a été exploitée dans l'étude de Warren *et al.* (2006) et dans celle de Stölting (2008).

Dans la section suivante, nous examinerons plus en détail chacune des composantes de la pensée fonctionnelle. Sans chercher à être exhaustifs, nous exposerons les divers éléments importants constitutifs des trois composantes.

3.2 La pensée fonctionnelle : un ensemble de raisonnements particuliers

La pensée fonctionnelle se concrétise en partie par les différents raisonnements particuliers qu'elle mobilise. Dans cette section, nous exposerons les raisonnements caractéristiques de la pensée fonctionnelle. Il ne s'agit pas d'une liste exhaustive et les éléments présentés ne constituent pas tous les raisonnements qui pourraient être mobilisés dans une activité fonctionnelle. Pour nous, quatre raisonnements sont essentiels pour la pensée fonctionnelle et permettent de caractériser cette manière de penser.

3.2.1 Tendance à modéliser (RF-1)

Le premier raisonnement est la tendance à modéliser fonctionnellement (RF-1). Avoir une tendance à modéliser fonctionnellement signifie qu'en étant confronté à une situation fonctionnelle, on tente de trouver un modèle fonctionnel pour traduire le lien de dépendance, la covariation ou la correspondance entre deux quantités variables. Ce premier raisonnement est à l'origine du concept de fonction puisqu'au départ, avant de devenir un objet sur lequel il est possible d'opérer, la fonction servait fondamentalement à modéliser un phénomène observable et souvent scientifique (physique, astronomie, chimie, etc.).

La tendance à modéliser se déploie également lorsque l'on tente de définir les limites du modèle, de prédire des données éloignées, d'idéaliser la situation de départ afin d'en dégager les invariants ou encore de tester la validité du modèle dans une situation réelle.

3.2.2 Tendance à généraliser (RF-2)

Le second type de raisonnement est la tendance à généraliser fonctionnellement (RF-2). Encore une fois, une personne avec une pensée algébrique aura tendance à voir le général dans le particulier, à interpréter des valeurs spécifiques comme les instanciations de variables et à tenter de décrire la relation fonctionnelle qui lie ces variables. En effet, en regardant les quelques valeurs données, on tente de vérifier si la relation découverte est valide pour d'autres valeurs, si elle est toujours vraie et s'il est possible de la représenter par une règle générale.

3.2.3 Tendance à s'intéresser à la covariation (RF-3)

Le troisième raisonnement correspond à la tendance à s'intéresser à la covariation entre deux quantités variables (RF-3). Certains auteurs anglophones parlent de ce raisonnement et l'appellent le raisonnement covariationnel. Il est défini par Carlson *et al.* (2002) comme une activité cognitive qui consiste à coordonner deux grandeurs qui varient en même temps tout en considérant la manière dont celles-ci évoluent en fonction l'une de l'autre. Par exemple, en regardant une table de valeurs, ce type de raisonnement se manifeste alors que l'attention est portée sur l'impact de la variation de la variable indépendante sur la variation de la variable dépendante.

3.2.4 Tendance à s'intéresser à la relation de correspondance (RF-4)

Finalement, le quatrième raisonnement fonctionnel est la tendance à s'intéresser à la relation de correspondance entre deux quantités variables (RF-4). Approcher la fonction par son aspect de correspondance consiste à observer comment obtenir une valeur de la variable dépendante à partir de la valeur correspondante de la variable indépendante. Pour Passaro (2015), « [l]a correspondance est donc associée au lien interne entre les grandeurs » (p. 21). Le raisonnement convoqué repose sur une tendance de l'esprit à chercher à décrire le lien de dépendance entre les variables, le plus souvent en tentant de définir la règle de la relation fonctionnelle : la règle de correspondance.

Les tendances à modéliser, à généraliser, à utiliser un raisonnement covariationnel ou à s'intéresser à la relation de correspondance sont des types de raisonnements qui offrent une vue d'ensemble de notre première composante de la pensée fonctionnelle qui se déploie lors du travail sur une activité fonctionnelle. Bien évidemment, la tendance à modéliser s'observe plus souvent lors d'une activité de modélisation fonctionnelle et il en est de même pour la tendance à généraliser. Toutefois, tous les raisonnements fonctionnels exposés peuvent intervenir dans une activité fonctionnelle. Le tout dépend du regard porté sur l'activité.

3.3 La pensée fonctionnelle : un rapport aux concepts

La pensée fonctionnelle et les concepts s'y rattachant sont imprégnés des racines historiques relatives au concept de fonction. En effet, bien que le terme « fonction » ne fasse son apparition qu'en 1673 alors que Leibniz l'utilise pour « désigner des grandeurs dont les variations sont liées par une loi » (René de Cotret, 1988, p. 8), l'étude des variations et des liens de dépendance émerge d'un désir de comprendre non plus pourquoi les choses changent, mais bien comment elles changent (*Ibid.*).

Pour Dreyfus et Eisenberg (1982), la fonction ne peut être un concept en soi que si tous ses sous-concepts fondamentaux sont pris en considération. La pensée fonctionnelle s'opérationnalise ainsi à partir d'un rapport particulier aux concepts qu'elle englobe : la variable, la dépendance, les relations fonctionnelles, la relation d'équivalence, la covariation et la correspondance. Ces derniers seront appelés des concepts fonctionnels (CF).

3.3.1 Tendance à voir une quantité comme l'instanciation d'une variable (CF-1)

Le premier concept à traiter pour son apport à la pensée fonctionnelle est celui de variable. Le concept de variable est central dans le domaine de la mathématique puisqu'il fournit les bases pour une transition entre l'arithmétique et l'algèbre en plus d'être indispensable pour l'apprentissage des mathématiques avancées (Arcavi et Schoenfeld, 1987). En mathématique, une variable réfère à un symbole (pas nécessairement une lettre) permettant de représenter une quantité dont les valeurs varient (Thompson et Carlson, 2017) dans un certain domaine de valeurs.

L'utilisation d'un symbole pour représenter la valeur d'une quantité n'est pas uniquement réservée à la variable et c'est pour cette raison qu'il importe de bien savoir la reconnaitre. Tout d'abord, un symbole peut représenter une quantité inconnue (possiblement plusieurs, une infinité ou aucune) qui est définie par une égalité conditionnelle. La ou les valeurs de l'inconnue, si elles existent, sont celles qui rendent l'égalité conditionnelle vraie. Selon Thompson (1990) cité dans Thompson et Carlson (2017), un symbole peut aussi être utilisé pour représenter la valeur d'une constante, c'est-à-dire d'une quantité qui ne varie jamais. De même, un symbole peut être utilisé pour représenter un paramètre qui correspond, toujours selon Thompson (1990), à une quantité dont la valeur peut changer, mais qui reste fixe pour un contexte particulier (*Ibid.*). En parallèle, lorsqu'un symbole est utilisé pour désigner une variable, celui-ci représente la valeur d'une quantité qui varie à l'intérieur d'un même contexte. Pour Freudenthal (2002), la particularité de la variable renvoi à l'aspect cinématique donné à la lettre qui la représente, c'est-à-dire au mouvement qu'elle décrit.

Dans une situation mathématique quelconque, il importe de savoir reconnaitre la ou les variables en jeu et de comprendre que les instanciations données dans la situation ne constituent qu'un sous-ensemble de toutes les valeurs que peut prendre la variable. Ainsi, dans une situation fonctionnelle, une tendance à voir une ou plusieurs valeurs spécifiques comme une instanciation d'une variable (CF-1) plutôt que comme une ou un ensemble de valeurs spécifiques singulières, non rattachées à une variable, expose un premier élément de la pensée fonctionnelle.

3.3.2 Tendance à percevoir la dépendance entre deux quantités covariantes (CF-2)

La tendance à percevoir la dépendance entre deux quantités et à tenter de bien comprendre ce lien est essentielle au développement de la pensée fonctionnelle (CF-2). En effet, l'idée de dépendance se retrouve fondamentalement au cœur du concept de fonction. Concrètement, pour René de Cotret (1988), c'est l'idée de variable dépendante qui serait historiquement à la base du concept de fonction. Pour modéliser le mouvement, comme le voulaient les mathématiciens du Moyen Âge, il faut généralement mettre en relation deux quantités variables. Par exemple, dans le cas du mouvement d'un mobile, c'est la variation de la variable « temps » qui entraine une variation de la variable « position ». Ces deux variables continues sont jointes par un lien de dépendance : la position du mobile dépend de la durée du déplacement. Pour Freudenthal (2002), la fonction est une forme spéciale de dépendance entre deux variables dites dépendante et indépendante.

Or, René de Cotret (1988) argumente que « le seul moyen de s'apercevoir qu'une chose dépend d'une autre est de les faire varier chacune à leur tour afin de constater quel effet a la variation » (p. 7). Les concepts de variable et de dépendance sont donc intimement liés, ce qui implique qu'une mauvaise conceptualisation de la variable peut entrainer des difficultés pour la perception de la dépendance.

3.3.3 Tendance à voir une expression algébrique comme une relation fonctionnelle (CF-3)

L'une des choses qui distinguent la pensée fonctionnelle de la pensée algébrique se perçoit par une tendance à voir une expression algébrique prioritairement comme une relation fonctionnelle (CF-3). Une expression comme 4x – 3 ou $-2x^2 - 3x + 5$ est algébrique puisqu'elle se compose d'un nombre fini de symboles, de nombres et d'opérations. Or, cette expression représente également une relation fonctionnelle lorsque le symbole *x* est considéré comme une variable représentant les valeurs d'un certain domaine. La résolution de l'équation $4x - 3 = -2x^2 - 3x + 5$ consiste à la recherche des valeurs de la variable x pour lesquelles les valeurs des variables dépendantes équivalentes à 4x – 3 et $-2x^2 - 3x + 5$ coïncident. Dans ce cas, le symbole *x* n'est pas considéré comme une quantité fixe inconnue à découvrir puisque les deux membres de l'égalité représentent des relations fonctionnelles. Cette tendance est indispensable pour la pensée fonctionnelle, notamment pour son lien important avec le concept fonctionnel suivant (CF-4).

3.3.4 Tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence entre deux règles fonctionnelles (CF-4)

La tendance à voir une équation comme une relation d'équivalence entre deux règles fonctionnelles (CF-4) est étroitement liée au concept précédent. En effet, elle consiste à regarder une identité telle que $\frac{x^2+x+1}{x^3-1} = \frac{1}{x-1}\ pour\ tout\ x\ \neq 1,$ comme l'équivalence de deux règles fonctionnelles.

3.3.5 Tendance à percevoir la covariation entre deux variables et à déterminer le sens de la variation (CF-5)

Avant de discuter de la covariation, il importe de poser un regard sur un concept fondamental, celui de variation qui vient naturellement s'ajouter à celui de variable puisque sans variation, la variable perd son statut.

> The mathematics of variation involves imagining a quantity whose value varies. It is easy to say what variation is, but it is nontrivial for students to develop the conceptual operations that allow them to see variation in quantities and quantitative situations (Thompson, 2011, p. 46).

L'idée de variation est un construit qui se forge en envisageant les différentes valeurs qu'une variable peut prendre, et ce, de manière dynamique plutôt que statique. La variation peut être vue comme un mouvement, un passage, un glissement ou encore un changement qui s'effectue à travers l'ensemble des différentes valeurs du domaine de la variable. Castillo-Garsow, Johnson et Moore (2013) mentionnent que la variation se conceptualise par une vision dynamique de changement.

Pour sa part, l'idée de covariation consiste à considérer les accroissements concomitants des deux grandeurs qui sont mises en relation par le lien de dépendance rendu explicite par une fonction. La covariation est donc un processus dynamique qui se construit en observant la variation que la variable dépendante subit lors de la variation de la variable indépendante (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon et Reed, 2012).

La pensée fonctionnelle se manifeste donc en partie par une tendance à vouloir déterminer le sens de la variation entre deux variables et à observer la nature de la covariation entre celles-ci (CF-5).

3.3.6 Tendance à percevoir la relation de correspondance entre deux quantités (CF-6)

La tendance à percevoir la relation de correspondance entre deux quantités (CF-6) fait appel au dernier concept fonctionnel : la correspondance. Alors que dans les premières définitions du concept de fonction la variation et la dépendance étaient centrales, les définitions actuelles font plus souvent référence à la correspondance (René de Cotret, 1988). En effet, selon Selden et Selden (1992), les fonctions peuvent être vues comme un ensemble de couples de valeurs ordonnées ou comme faisant état d'une correspondance entre deux ensembles.

Selon Confrey et Smith (1995, dans Passaro, 2015), approcher la fonction par son aspect de correspondance consiste à observer comment obtenir une valeur de la variable dépendante à partir de la valeur correspondante de la variable indépendante. Cette tendance se manifeste notamment par la recherche de la règle de correspondance (Passaro, 2015).

En conclusion, les divers concepts mentionnés ci-dessus peuvent être sollicités dans les activités fonctionnelles puisqu'ils touchent de près ou de loin le concept de fonction. Un travail sur l'un ou l'autre de ces concepts peut ainsi faire évoluer la pensée fonctionnelle.

3.4 La pensée fonctionnelle : une manière de communiquer

La dernière composante indispensable de la pensée fonctionnelle correspond à la manière de communiquer et de représenter les fonctions. Un objet mathématique n'est accessible que par ses représentations et non pas directement accessible par les sens (Hitt, 2004). Il faut donc s'intéresser aux différents registres de représentations utilisés dans l'apprentissage des fonctions puisque ceux-ci auront divers impacts sur la construction des connaissances (*Ibid.*). En effet, le concept de fonction est riche et la compréhension de ses propriétés est atteignable par la prise en considération de ses multiples représentations (Yavuz, 2010). En fait, il n'existe pas de représentation incluant en elle-même toutes les propriétés du concept de fonction (Elia, Panaoura, Eracleous et Gagatsis, 2007, dans Doorman *et al.,* 2012 ; Yavuz, 2010).

Duval (1993) parle pour sa part de représentations sémiotiques d'un objet mathématique. « Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (p. 39). Celles-ci sont indispensables à la compréhension et à l'activité mathématique.

3.4.1 Tendance à recourir à divers registres de représentation (tout particulièrement le registre tabulaire, graphique, algébrique et le langage non-algébrique) pour représenter et opérer sur les variables et les relations fonctionnelles (CRF-1)

Pour communiquer dans le contexte de situations fonctionnelles, la pensée fonctionnelle se déploie par une tendance à recourir à divers registres de représentation pour représenter et opérer sur les variables et les relations fonctionnelles (CRF-1). Pour nous, quatre registres sont indispensables pour le développement de la pensée fonctionnelle élémentaire : le registre tabulaire, le registre graphique, le registre algébrique et le registre oral. De plus, Hitt et González-Martín (2015) font mention de l'importance des représentations non institutionnelles et spontanées qui émergent lors de la résolution d'un problème mathématique. Dans le cadre de cette recherche, ces représentations, que nous dirons fonctionnelles, émergent spontanément lorsque l'élève tente de comprendre et de résoudre un problème non familier. Les représentations institutionnelles et les représentations non institutionnelles telles que définies par Hitt et González-Martín (2015) seront prises en considération.

Pour développer une pensée fonctionnelle riche, il importe de connaître et de savoir utiliser les divers registres de représentations associés à la fonction puisque chacun de ceux-ci permet de contempler l'une des facettes de ce concept. En effet, selon Duval (1993), un objet mathématique n'est pas et ne doit pas être associé uniquement à l'une de ses représentations. Il doit être reconnaissable en chacune d'elles. C'est une articulation de divers registres qui permet une appréhension conceptuelle des objets. Le recours à plusieurs registres est donc une condition indispensable pour une compréhension approfondie des objets mathématiques.

La tendance à recourir à divers registres de représentation se manifeste autant pour la modélisation, la généralisation et l'étude d'une relation fonctionnelle. En effet, pour modéliser, généraliser ou étudier une situation, il faut recourir à l'un des registres. Par exemple, pour comprendre des phénomènes, les physiciens utilisent le registre graphique pour y inscrire des observations expérimentales. De même, pour la généralisation, le registre tabulaire s'avère très efficace pour déceler une régularité et la généraliser.

De plus, pour pouvoir étudier une fonction, il importe de savoir articuler ses diverses représentations. La pensée fonctionnelle s'observe donc par une tendance à articuler les diverses représentations d'une fonction. En effet, le passage du registre tabulaire au registre graphique ou au registre algébrique constitue un aspect important pour une bonne compréhension des multiples facettes de ce concept (Yavuz, 2010). Comme exemple, reprenons celui utilisé précédemment soit la résolution de l'équation $4x - 3 = -2x^2 - 3x + 5$. Avec une pensée fonctionnelle, on a tendance à interpréter le membre de gauche de l'équation comme la règle d'une fonction linéaire et à interpréter le membre de droite comme la règle d'une fonction quadratique. En articulant avec le registre graphique, on en déduit que la résolution de cette équation revient à la recherche des abscisses des points d'intersection entre une droite et une parabole. Le nombre de solutions est donc soit 0 (aucun point d'intersection), 1 (la droite est tangente à la parabole) ou 2 (la droite coupe la parabole). Ainsi, une bonne compréhension de la relation d'équivalence et des différents registres de représentation entre les règles fonctionnelles pourrait favoriser la détection des particularités de divers systèmes d'équations fonctionnelles.

Cette tendance à communiquer et à représenter s'insère inévitablement dans toutes les autres composantes de la pensée fonctionnelle. Dans les faits, les divers types de raisonnements mentionnés s'expriment à travers les représentations. De plus, le rapport particulier aux concepts qui est propre à la pensée fonctionnelle se développe également à travers une compréhension des divers registres de représentation et de leur potentialité. Les trois grandes composantes de la pensée fonctionnelle ne sont pas exclusives et leur développement individuel enrichit et favorise celui des autres.

3.5 Notre proposition : un regard critique

Pour vérifier la qualité de notre proposition, faisons une analyse comparative avec les définitions proposées par d'autres auteurs.

Tout d'abord, dans la définition de Smith (2008), les idées de généralisation, de covariation et de dépendance s'expriment à travers les représentations. Ces divers aspects ont tous une place importante dans notre proposition.

Ensuite, la conception de Blanton et Kaput (2011) de la pensée fonctionnelle inclut les idées de généralisation, d'étude des régularités et des relations fonctionnelles. De plus, leur définition large englobe l'articulation des divers registres de représentation qui peuvent être autant institutionnels ou personnels. Ces idées se retrouvent dans notre proposition qui prend également en considération le fait de considérer la fonction comme un objet en lui-même, plus particulièrement par la tendance à analyser les relations fonctionnelles.

Finalement, la définition de Stölting (2008) est celle qui se rapproche le plus de notre proposition. En effet, elle rassemble plusieurs éléments importants de la pensée fonctionnelle, mais ne fait pas état de certaines tendances mentionnées dans la nôtre comme la généralisation et la pertinence de voir l'égalité comme une relation fonctionnelle.

En résumé, notre proposition nous semble plus appropriée que celles-ci d'abord puisqu'elle réunit les idées importantes des définitions ci-dessus. De plus, elle apporte une précision supplémentaire par la distinction qu'elle fournit entre la pensée fonctionnelle et ses raisonnements. Elle inclut également des éléments qui permettent de différencier la pensée algébrique de la pensée fonctionnelle. C'est donc à partir de notre proposition que nous analyserons le potentiel des activités d'apprentissage proposées par les manuels scolaires québécois pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle. Pour ce faire, nous opérationnaliserons le cadre d'analyse praxéologique tel que défini par Chevallard pour créer notre cadre d'analyse praxéologique de la pensée fonctionnelle. Regardons plus en détail les fondements de ce cadre d'analyse.

4. ANALYSE *A PRIORI* : NOS PRAXÉOLOGIES DE RÉFÉRENCES

Pour étudier les praxéologies mathématiques relatives au développement précoce de la pensée fonctionnelle, il importait d'expliciter notre modèle épistémologique de référence puisque celui-ci nous servira de grille de lecture pour interpréter nos observations (Wozniak, 2012). Or, c'est à travers une analyse *a priori* que se dévoilera davantage ce modèle puisque dans celle-ci, nous constituerons les praxéologies de références à partir desquelles il sera possible d'analyser les manuels scolaires. En effet, dans cette analyse *a priori*, nous émettons des hypothèses quant aux genres de tâches, aux types de tâches, aux techniques et aux discours technologico-théoriques qui favorisent le développement de la pensée fonctionnelle précoce à l'intérieur de chaque activité fonctionnelle établie. Rappelons que dans le cadre de cette recherche, trois activités fonctionnelles seront étudiées :

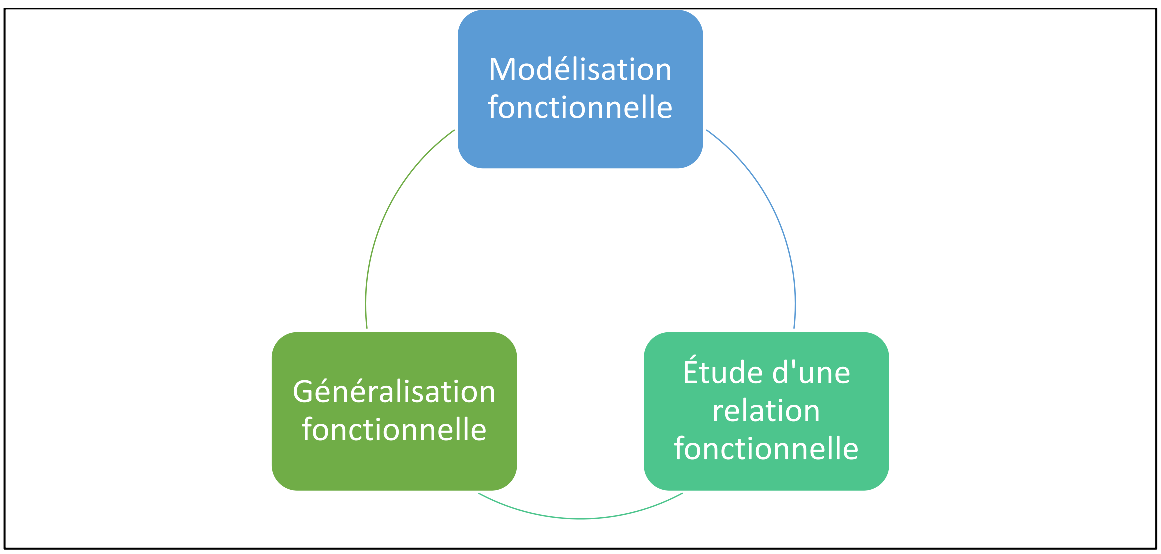


Figure 3 – Schéma des trois activités fonctionnelles à l'étude

Comme nous nous intéressons au développement précoce de la pensée fonctionnelle, les types de tâches énumérés seront adaptés à des niveaux d'étude équivalents à la fin du primaire et au secondaire. Nous n'aborderons pas des types de tâches relatifs à la branche de l'analyse. Par exemple, pour initier les élèves à la modélisation fonctionnelle dès un jeune âge, un type de tâches approprié pourrait être celui d'identifier les variables en jeu dans une situation réelle.

4.1 Praxéologie de référence relative à la modélisation fonctionnelle

La modélisation fonctionnelle est un processus à travers lequel une situation réelle est étudiée afin d'établir le modèle fonctionnel le plus approprié possible qui traduit la relation fonctionnelle en jeu. Ce modèle fonctionnel offre une représentation simplifiée d'une relation fonctionnelle complexe du monde réel.

4.1.1 Principaux genres de tâches et types de tâches

Les genres de tâches qui constituent notre praxéologie de référence de la modélisation fonctionnelle sont les suivants :

- T_I : Identifier les différentes données de la situation réelle ;
- T_G : Générer des données ;
- T_O : Organiser les données ;
- T_D : Déterminer la relation fonctionnelle entre les quantités variables (le modèle fonctionnel) ;
- T_R : Représenter la relation fonctionnelle ;
- T_P : Prédire des données à partir du modèle fonctionnel établi ou le comportement du modèle.

La liste (non exhaustive) des types de tâches associés aux divers genres de tâches est exposée dans le tableau 1.

Tableau 1

Types de tâches relatifs à l'activité de modélisation fonctionnelle

Genre de tâches	**Types de tâches**
T_I : Identifier	$T_{I\text{-}V*}$: Identifier les <u>v</u>ariables en jeu dans la situation réelle Exemple : le nombre d'heures et la distance parcourue en km en roulant à vitesse constante.
	$T_{I\text{-}D}$: Identifier le lien de <u>d</u>épendance entre les quantités variables Exemple : la distance parcourue en km à vitesse constante dépend du nombre d'heures de déplacement.
	$T_{I\text{-}T}$: Identifier une tendance entre les données Exemple : la distance parcourue à vitesse constante semble augmenter si le nombre d'heures de déplacement double.
	$T_{I\text{-}S}$: Identifier le sens de la variation Exemple : plus le nombre d'heures augmente, plus la distance parcourue augmente.
T_G : Générer	$T_{G\text{-}D}$: Générer des données à partir de la <u>d</u>escription de la situation réelle Exemple : En roulant à vitesse constante de 50 km/h, nous savons qu'après une heure de déplacement, la distance parcourue sera de 50 km.
	$T_{G\text{-}E}$: Générer des données à partir d'une <u>e</u>xpérimentation Exemple : Dans la vie réelle, plusieurs facteurs influencent la vitesse d'une voiture (arrêts, les piétons, la qualité des routes, etc.). Aujourd'hui, un trajet de 13 minutes m'a permis de parcourir 22 km.
T_O : Organiser	$T_{O\text{-}T}$: Organiser les données dans le registre <u>t</u>abulaire Exemple : classer les données en ordre croissant de la variable indépendante.

T_D : Déterminer	$T_{D\text{-}COR}$: Déterminer la relation de correspondance entre les quantités variables Exemple : prenons les couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2). On trouve que si $y_1 = 50x_1$, alors $y_2 = 50x_2$
	$T_{D\text{-}COV}$: Déterminer la relation de covariation entre les quantités variables Exemple : prenons les couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2). On trouve que si $x_2 = 3x_1$, alors $y_2 = 3y_1$
	$T_{D\text{-}M}$: Déterminer le modèle fonctionnel le plus approprié à la situation réelle Exemple : $y = 50x$
	$T_{D\text{-}V}$: Déterminer une valeur manquante à partir du modèle fonctionnel établi Exemple : On détermine d'abord le modèle $y = 50x$ et on trouve ensuite la distance parcourue après 3h qui est de 150 km
	$T_{D\text{-}L}$: Déterminer les limites du modèle fonctionnel Exemple : Le modèle est valide entre deux pleins d'essence
T_R : Représenter	$T_{R\text{-}G}$: Représenter les données dans le registre graphique
	$T_{R\text{-}T}$: Représenter les données dans le registre tabulaire
	$T_{R\text{-}C}$: Représenter la courbe du modèle fonctionnel qui se rapproche le plus des données dans le registre graphique
	$T_{R\text{-}M}$: Représenter le modèle fonctionnel dans divers registres de représentation
T_P : Prédire	$T_{P\text{-}V}$: Prédire le comportement des variables en jeu en fonction de la situation réelle Exemple : après un certain temps, il faudra nécessairement faire un arrêt pour faire le plein d'essence. La distance parcourue sera donc affectée par cet arrêt.
	$T_{P\text{-}M}$: Prédire le comportement du modèle fonctionnel en fonction de la situation réelle Exemple : en fonction des facteurs qui influencent la vitesse d'une voiture, le modèle fonctionnel peut varier considérablement. Toutefois, le sens de la variation ne sera jamais changé.

*La notation des types de tâches est faite à partir du genre de tâches (première lettre) et de la ou des premières lettres d'un mot-clé du type de tâches (lettres qui suivent le tiret). Ces dernières sont soulignées dans la description des types de tâches.

Deux types de tâches sont similaires, soit $T_{I\text{-}T}$ et $T_{D\text{-}COV}$. Pour les distinguer de manière plus significative, pensons en termes de niveaux de compréhension. Identifier la tendance entre les données ne veut pas nécessairement dire être capable de quantifier cette tendance. Il peut s'agir d'une première intuition relative au modèle fonctionnel approprié. Par exemple. pour une fonction exponentielle, les élèves pourraient dire que la variable dépendante augmente de plus en plus rapidement. Or, déterminer la relation de covariation entre les quantités variables signifie d'être capable d'identifier concrètement et de quantifier comment varie la variable dépendante à la suite de la variation de la variable indépendante.

4.1.2 Principales techniques pour les genres de tâches Déterminer *et* Représenter

Comme plusieurs genres de tâches relatifs à la modélisation fonctionnelle font appel à la compréhension de la situation réelle en jeu plutôt qu'à des concepts mathématiques, nous n'exposerons que des techniques génériques pour les genres de tâches *Déterminer* et *Représenter.* Ainsi, pour le genre de tâches *Déterminer*, la technique générique (appelée τ_{TD-COR}) pour le type de tâches $T_{D\text{-}COR}$ *: Déterminer la relation de correspondance entre les quantités variables* est la suivante :

- Observer la relation fonctionnelle entre les valeurs de la variable indépendante et les valeurs respectives de la variable dépendante ;
- Vérifier si cette relation fonctionnelle est valable pour tous les couples de valeurs ;
- Convoquer des symboles (des lettres, des mots, etc.) pour généraliser cette relation fonctionnelle.

Pour le type de tâches $T_{D\text{-}COV}$ *: Déterminer la relation de covariation entre les quantités variables,* une technique générique (appelée τ_{TD-COV}) est la suivante :

- Faire varier la valeur de la variable indépendante et observer l'effet de cette variation sur la variation de la variable dépendante ;
- Vérifier si cet effet est le même pour différentes valeurs ;
- Convoquer des symboles (des lettres, des mots, etc.) pour généraliser cette relation de covariation.

Pour le type de tâches $T_{D\text{-}M}$ *: Déterminer le modèle fonctionnel le plus approprié à la situation réelle,* une technique générique (appelée τ_{TD-M}) est la suivante :

- Observer la relation de dépendance entre les quantités variables ;
- Recenser les différents modèles fonctionnels connus (linéaire, quadratique, sinusoïdal, etc.) ;
- Identifier le modèle qui permet de générer des données qui se rapprochent le plus des données observées ;
- Tester ce modèle par extrapolation si nécessaire.

Toujours pour le même genre de tâches, une technique générique (appelée $\tau_{TDÉT-V}$) pour le type de tâche $T_{DÉT\text{-}V}$: *Déterminer une valeur manquante à partir du modèle fonctionnel établi* est la suivante :

- Observer la relation de dépendance entre les quantités variables ;
- Recenser les différents modèles fonctionnels connus (linéaire, quadratique, sinusoïdal, etc.) ;
- Identifier le modèle qui permet de générer des données qui se rapprochent le plus des données observées ;
- À partir de modèle fonctionnel, remplacer toutes les quantités connues par leur valeur ;
- Isoler la variable restante en opérant sur les symboles selon des règles prédéfinies de manière à conserver la relation d'équivalence.

En ce qui concerne le genre de tâches *Représenter*, une technique générique pour tous les types de tâches serait la suivante :

- Interpréter la situation fonctionnelle ;
- Générer différents couples de valeurs (x, y) ;
- Représenter ces couples dans le registre de représentation convoqué ;

- Appliquer les règles de conversion entre les registres sémiotiques quand cela est nécessaire.

4.1.3 Éléments du bloc technologico-théorique

Le discours technologico-théorique relatif aux techniques qui permettent de réaliser les différents types de tâches présentés repose d'abord sur le processus de modélisation et sur divers fondements relatifs au concept de covariation et de correspondance de la théorie des fonctions réelles à une variable. Il s'appuie également sur les règles et conventions relatives aux divers registres de représentation sémiotiques et sur les règles de conversion entre ces derniers.

4.2 Praxéologie de référence relative à la généralisation fonctionnelle

La généralisation fonctionnelle est considérée ici comme un processus à travers lequel une régularité entre quelques instanciations (des couples) des variables est pressentie, une hypothèse est formulée puis vérifiée sur des valeurs d'un certain domaine. Elle se termine par la justification de la relation fonctionnelle généralisée.

4.2.1 Principaux genres de tâches et types de tâches

Les genres de tâches qui constituent notre praxéologie de référence de la généralisation fonctionnelle sont les suivants :

- T_I : Identifier la relation fonctionnelle
- T_F : Formuler la relation fonctionnelle généralisée
- T_R : Rechercher un autre couple de valeurs
- T_J : Justifier la relation fonctionnelle établie

La liste (non exhaustive) des types de tâches associés aux divers genres de tâches est exposée dans le tableau 2.

Tableau 2

Types de tâches relatifs à l'activité de généralisation fonctionnelle

Genre de tâches	**Types de tâches**
T_I : Identifier	$T_{I\text{-}I^*}$: Identifier la régularité à partir de quelques instanciations (couples) Exemple : (1, 2), (2, 4), (3, 6) : la valeur de l'ordonnée correspond toujours au double de la valeur de l'abscisse ($y = 2x$)
	$T_{I\text{-}RF}$: Identifier la relation fonctionnelle à partir de quelques instanciations (couples) Exemple : (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9) : les données sont générées à partir d'une fonction quadratique
	$T_{I\text{-}D}$: Identifier une régularité à partir de dessins Exemple : les nombres triangulaires
T_F : Formuler	$T_{F\text{-}M}$: Formuler la relation fonctionnelle généralisée en mots Exemple : Pour trouver le nombre de chaises, il faut toujours multiplier le nombre de tables par deux et ajouter deux.
	$T_{F\text{-}S}$: Formuler la relation fonctionnelle généralisée à l'aide d'un langage symbolique (pas nécessairement algébrique) Exemple : nb de chaises = (nb de tables x 2) + 2
	$T_{F\text{-}L}$: Formuler la relation fonctionnelle généralisée à l'aide du langage algébrique Exemple : $f(x) = 2x + 2$
T_R : Rechercher	$T_{R\text{-}R}$: Rechercher un couple de valeurs proche

	Exemple : (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), je trouve ensuite (4, 16)
	$T_{R\text{-}É}$: Rechercher un couple de valeurs lointain Exemple : (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), je trouve ensuite (50, 2 500)
	$T_{R\text{-}G}$: Rechercher le cas (couple de valeurs) général Exemple : (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), je trouve ensuite (x, x^2)
T_J : Justifier	$T_{J\text{-}E}$: Justifier la relation fonctionnelle généralisée à l'aide un exemple générique
	$T_{J\text{-}AI}$: Justifier la relation fonctionnelle généralisée en se basant sur un argument intellectuel
	$T_{J\text{-}P}$: Justifier la relation fonctionnelle généralisée en faisant la preuve formelle

*La notation des types de tâches est faite à partir du genre de tâches (première lettre) et de la ou des premières lettres d'un mot-clé du type de tâches (lettres qui suivent le tiret). Ces dernières sont soulignées dans la description des types de tâches.

Encore une fois, deux types de tâches sont similaires, soit $T_{F\text{-}L}$ et $T_{R\text{-}G}$, et méritent quelques éléments de précision. Ce qui les distingue ici est la représentation dans laquelle la relation fonctionnelle est présentée. Dans le cas de $T_{F\text{-}L}$, la relation fonctionnelle est rendue explicite par l'utilisation des deux quantités variables en contexte. Par exemple, le nombre de chaises nécessaire sera donné en fonction du nombre de tables. Toutefois, surtout lors du travail dans le registre tabulaire, il arrive que la généralité soit observée directement à travers les données présentées en ne référant plus au contexte. Dans le cas de $T_{R\text{-}G}$, le lien entre les deux quantités variables du contexte n'est rendu explicite que par la traduction des lettres utilisées comme variables.

4.2.2 Principales techniques pour les genres de tâches Identifier*,* Formuler *et* Justifier

Les genres de tâches explicités ci-dessus font appel au processus de généralisation. Les techniques génériques relatives à chaque type de tâches font donc appel aux différents moments de ce processus. Ainsi, pour le genre de tâches *Identifier*, la technique générique (appelée τ_{TI}) s'appuie sur le premier moment : pressentir une régularité. Pour le genre de tâches *Formuler*, la technique générique (appelée τ_{TF}) s'appuie sur le premier et le deuxième moment du processus :

- Pressentir une régularité ;

- Formuler la régularité en invoquant un registre de représentation sémiotique institutionnel ou non institutionnel.

Finalement, pour le genre de tâches *Justifier,* une technique générique (appelée τ_J) est la suivante :

- Pressentir une régularité ;
- Formuler la régularité en invoquant un registre de représentation sémiotique institutionnel ou non institutionnel ;
- Justifier la relation fonctionnelle généralisée par une preuve formelle, un argument intellectuel ou un exemple générique.

4.2.3 Éléments du bloc technologico-théorique

Le discours technologico-théorique relatif aux techniques qui permettent de réaliser les différents types de tâches présentés repose d'abord sur le processus de généralisation et, comme pour la modélisation fonctionnelle, sur divers fondements relatifs au concept de correspondance de la théorie des fonctions réelles à une variable. Il s'appuie, encore une fois, sur les règles et conventions relatives aux divers registres de représentation sémiotiques et sur les règles de conversion entre ces derniers.

4.3 Praxéologie de référence relative à l'étude d'une relation fonctionnelle

L'étude d'une relation fonctionnelle consiste à étudier une relation fonctionnelle déjà connue. Elle peut être fournie sous l'une ou plusieurs de ses représentations sémiotiques. Elle sert notamment à mieux comprendre une fonction en l'étudiant sous ses différentes facettes. Cette activité fonctionnelle représente entre autres tout ce qu'il est possible de faire lorsque la fonction est considérée comme un objet mathématique en soi. Rappelons que notre étude se limite au développement précoce de la pensée fonctionnelle et que les types de tâches présentés restent accessibles pour des élèves du primaire.

4.3.1 Principaux genres de tâches et types de tâches

Les genres de tâches qui constituent notre praxéologie de référence de l'étude d'une relation fonctionnelle sont les suivants :

- $T_{\text{DÉT}}$: Déterminer différentes composantes de la relation fonctionnelle
- $T_{\text{DÉC}}$: Décrire le lien de covariation ou de correspondance entre les quantités variables
- T_{R} : Représenter la relation fonctionnelle dans divers registres de représentation
- T_{O} : Opérer sur les relations fonctionnelles

La liste (non exhaustive) des types de tâches associés aux divers genres de tâches est exposée dans le tableau 3.

Tableau 3

Types de tâches relatifs à l'activité d'étude d'une relation fonctionnelle

Genre de tâches	**Types de tâches**
$T_{\text{DÉT}}$: Déterminer	$T_{\text{DÉT-C*}}$: Déterminer les caractéristiques de la relation fonctionnelle (domaine, codomaine, abscisse(s) à l'origine, ordonnée à l'origine, intervalles de croissance et décroissance, etc.) Exemple : la relation fonctionnelle $f(x) = 10x$ est croissante sur tout son domaine ($\mathbb{R}$)
	$T_{\text{DÉT-R}}$: Déterminer la fonction réciproque si elle existe Exemple : Les relations fonctionnelles qui permettent de trouver la température en degré Celsius à partir de la température en degré Fahreneit ou de faire l'inverse
	$T_{\text{DÉT-RF}}$: Déterminer (reconnaitre) la relation fonctionnelle à partir d'une représentation dans l'un ou l'autre des registres de représentation Exemple : En observant une représentation graphique, je détermine que la relation fonctionnelle en jeu est la fonction : $f(x) = 3x – 8$
	$T_{\text{DÉT-V}}$: Déterminer une valeur manquante Exemple : Trouver le montant de la taxe à payer pour un achat de 114$.
$T_{\text{DÉC}}$: Décrire	$T_{\text{DÉC-COR}}$: Décrire la relation de correspondance entre les quantités

	variables Exemple : La fonction $y = 3x$ est une relation de proportionnalité. La variable indépendante est toujours trois fois plus petite que la variable dépendante.
	$T_{DÉC\text{-}COV}$: Décrire la relation de covariation entre les quantités variables Exemple : La fonction $y = 3x$ est une relation de proportionnalité. Pour chaque accroissement de la variable indépendante, l'accroissement de la variable dépendante est trois fois plus grand.
T_R : Représenter	$T_{R\text{-}G}$: Représenter la relation fonctionnelle donnée sous sa forme analytique, algébrique ou tabulaire dans le registre graphique
	$T_{R\text{-}T}$: Représenter la relation fonctionnelle donnée sous sa forme analytique, algébrique ou graphique dans le registre tabulaire
	$T_{R\text{-}A}$: Représenter la relation fonctionnelle donnée sous sa forme graphique ou tabulaire dans le registre algébrique ou analytique
T_O : Opérer	$T_{O\text{-}A}$: Opérer sur les fonctions par l'addition de fonctions Exemple : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
	$T_{O\text{-}S}$: Opérer sur les fonctions par la soustraction de fonctions Exemple : $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
	$T_{O\text{-}P}$: Opérer sur les fonctions en faisant le produit de fonctions Exemple : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
	$T_{O\text{-}Q}$: Opérer sur les fonctions en faisant le quotient de fonctions Exemple : $(f \div g)(x) = f(x) \div g(x)$ avec $g(x) \neq 0$
	$T_{O\text{-}C}$: Opérer sur les fonctions par la composition de fonctions Exemple : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
	$T_{O\text{-}SÉ}$: Opérer sur un système d'équations en préservant la relation d'équivalence Exemple : $f(x) = g(x)$

*La notation des types de tâches est faite à partir du genre de tâches (premières lettres) et de la ou des premières lettres d'un mot-clé du type de tâches (lettres qui suivent le tiret). Ces dernières sont soulignées dans la description des types de tâches.

4.3.2 Principales techniques pour les genres de tâches Déterminer *et* Opérer

Les genres de tâches explicités ci-dessus font souvent appel à des techniques de manipulation d'expressions algébriques et analytiques. Ainsi, pour le genre de tâches *Déterminer*, la technique générique accessible pour le niveau d'étude en question (appelée $\tau_{TDÉT-R}$) pour le type de tâches $T_{DÉT\text{-}R}$ *: Déterminer la fonction réciproque si elle existe* est la suivante :

- À partir de l'expression analytique ou algébrique, inverser les deux variables (souvent *x* et *y*) ;
- Opérer sur les symboles selon les règles prédéfinies de manière à conserver la relation d'équivalence et à isoler *y*.

Toujours pour le même genre de tâches, une technique générique (appelée $\tau_{TD\acute{E}T-V}$) pour le type de tâches $T_{D\acute{E}T\text{-}V}$: *Déterminer une valeur manquante est la suivante* :

- En fonction du registre de représentation dans lequel la relation fonctionnelle est initialement exprimée, déterminer la représentation algébrique ou analytique de la fonction ;
- À partir de cette représentation, remplacer toutes les quantités connues par leur valeur ;
- Isoler la variable restante en opérant sur les symboles selon des règles prédéfinies de manière à conserver la relation d'équivalence.

En ce qui concerne le genre de tâches *Opérer*, une technique générique peut s'appliquer à tous les types de tâches puisqu'elle s'appuie sur les propriétés des opérations relatives aux fonctions. Il suffit de choisir la bonne propriété en fonction de l'opération en jeu. Ainsi, la technique générique (appelée τ_{TO}) pourrait être la suivante :

- En fonction de l'opération en jeu, choisir la bonne propriété parmi les suivantes :
  - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
  - $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$;
  - $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
  - $(f \div g)(x) = f(x) \div g(x)$ avec $g(x) \neq 0$;
  - $(f \circ g)(x) = f(g(x))$;
  - $f(x) = g(x)$;
- Opérer sur les symboles selon des règles prédéfinies de manière à conserver la relation d'équivalence et de simplifier l'expression ;

- Définir le domaine de la nouvelle fonction.

4.3.3 Éléments du bloc technologico-théorique

Les activités d'étude de relations fonctionnelles font appel à l'étude des caractéristiques relatives aux fonctions. Ainsi, le discours technologico-théorique s'appuie sur la théorie des fonctions réelles à une variable. De plus, plusieurs types de tâches réfèrent aux registres de représentation sémiotiques et à l'articulation entre ces registres. Il faut donc, encore une fois, convoquer les règles et les conventions relatives aux divers registres de représentation sémiotiques et les règles de conversion entre ces derniers.

5. QUESTIONS SPÉCIFIQUES DE RECHERCHE

Dans ce chapitre, nous avons exposé les fondements de la TAD et nous avons émis notre caractérisation de la pensée fonctionnelle. À partir de ces éléments, nous avons pu dresser une analyse *a priori* des activités qui favorisent le développement précoce de la pensée fonctionnelle. À l'aide de l'analyse praxéologique, notre projet a pour objectif d'analyser les situations d'apprentissage proposées par les manuels scolaires québécois du primaire pour en dégager leur potentiel pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle. Plus précisément, à partir de l'analyse *a priori* effectuée, nos questions spécifiques de recherche sont les suivantes :

1. Quelle est la place de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires ? Quelles activités fonctionnelles sont exploitées ?
2. Les types de tâches des trois activités fonctionnelles apparaissent-ils dans les manuels scolaires ? Si oui, sont-ils exploités au regard de leur potentiel fonctionnel à l'aide de techniques qui reposent sur un discours technologico-théorique relatif aux fonctions ?

3. Les composantes de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle apparaissent-elles dans les techniques mises de l'avant par les auteurs du manuel scolaire ou le guide de l'enseignant ?

TROISIEME CHAPITRE
METHODOLOGIE

Dans ce troisième chapitre, nous présentons les éléments méthodologiques qui nous permettront de répondre à nos diverses questions spécifiques de recherche. Après avoir exposé notre type de recherche et les méthodes qui nous permettront d'analyser les situations d'apprentissage, nous présentons plus précisément comment nous avons construit notre corpus d'analyse et comment nous pouvons concrètement faire ressortir le potentiel d'un manuel scolaire pour le développement de la pensée fonctionnelle.

1. TYPE DE RECHERCHE

L'objectif premier de cette recherche étant d'identifier la place du développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires, nous optons pour une recherche exploratoire et qualitative. Pour Van der Maren (1996, dans Lenoir, Hasni, Lacourse, Larose, Maubant et Zaid, 2012) une recherche exploratoire a pour objectif de générer des hypothèses par l'observation des données et des relations qui peuvent s'y retrouver. Ce type de recherche nous permettra d'établir des hypothèses quant à la place des activités fonctionnelles se retrouvant dans les manuels scolaires québécois et de vérifier si celles-ci sont exploitées pour le développement de la pensée fonctionnelle en fonction des types de tâches qui leur sont associés.

Notre recherche s'orientant sur l'analyse de manuels scolaires, nous nous appuyons sur l'analyse qualitative qui permet d'analyser en profondeur des données qualitatives. Ce type d'analyse permet entre autres de produire une description des observations réalisées par des interprétations et de l'extrapolation, c'est pourquoi le chercheur doit disposer d'une grille d'analyse qui se base sur la ou les théories particulières du champ de connaissances (Aktouf, 1987, dans Lenoir *et al*., 2012). Dans le cadre de notre recherche, une première grille d'analyse est celle qui est concrétisée par l'analyse *a priori* réalisée dans le chapitre précédent. Une seconde grille nous permettra ensuite de vérifier la présence des composantes de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle dans les situations d'apprentissage.

2. POPULATION ET ECHANTILLON

Nous avons choisi de nous orienter vers les manuels scolaires du troisième cycle du primaire pour examiner le potentiel des situations d'apprentissage pour le développement d'une pensée fonctionnelle précoce, c'est-à-dire avant l'introduction du concept de fonction. Pour effectuer notre choix, deux critères nous semblaient pertinents. Le premier concerne le niveau scolaire visé. Comme notre recherche s'inscrit dans les travaux portant sur le développement précoce de la pensée fonctionnelle, nous voulions choisir un niveau scolaire suffisamment éloigné de la 3e année du secondaire, année où la notion de fonction devient un objet explicite d'apprentissage. Pour cette raison, le primaire est adéquat. Le second critère concerne la richesse des situations d'apprentissage. En effet, nous voulions examiner des situations d'apprentissage riches et suffisamment complexes qui justifient l'utilisation de concepts fonctionnels. Pour cette raison, nous avons sélectionné le troisième cycle du primaire. Cette décision est particulièrement appropriée puisque ce cycle prépare les élèves aux apprentissages à réaliser au début du secondaire, sans toutefois en faire mention de manière explicite.

Seulement trois collections de manuels scolaires pour le troisième cycle du primaire en mathématiques sont approuvées en tant que matériel didactique par le Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur pour l'année 2017-2018 (Gouvernement du Québec, 2017). Les trois collections sont celles de *Clicmath* (Guay, S. *et al.*, 2004), *Presto, mathématique 3^{e} cycle* (Lacasse, C., 2003) et *Défi mathématique* (Lyons et Lyons, 2005*a*). L'objectif de ce projet de recherche exploratoire n'étant pas de procéder à une étude comparative des manuels scolaires, nous avons jugé qu'il n'était pertinent que de procéder à l'analyse de l'une de ces collections.

Le choix de la collection à étudier s'est arrêté sur le manuel *Défi mathématique* (Lyons et Lyons, 2005*a*) tomes 1 et 2. Ce manuel scolaire a été sélectionné pour la quantité et la richesse des situations d'apprentissage qu'il propose. De plus, il contient uniquement des situations d'apprentissage, et ce, sans section explicative qui oriente les élèves vers des techniques particulières pour la résolution de situations d'apprentissage. Ceci laisse ainsi plus de place à la créativité et à l'imagination pour la résolution des situations-problèmes. Cette collection vise un apprentissage par situations-problèmes à travers une approche constructiviste (*Ibid.*).

Le tome 1 de la collection réfère à la première année du cycle, soit la cinquième année du primaire (élèves de 10 à 11 ans) et le tome 2 réfère à la seconde année du cycle, soit la sixième année (élèves de 11 à 12 ans).

3. ÉTAPES DE REALISATION DE LA RECHERCHE

Pour répondre à nos diverses questions spécifiques de recherche, plusieurs étapes ont été nécessaires. La première étape consistait à identifier le corpus des situations d'apprentissage à analyser afin de ne conserver que celles qui font appel à une activité fonctionnelle. Nous pouvions ensuite nous concentrer sur ce corpus afin de faire ressortir les tâches qui sont à l'étude et d'ainsi pouvoir observer, avec notre analyse *a priori*, quels types de tâches et genres de tâches sont exploités ou ignorés. Finalement, à l'aide d'une seconde grille d'analyse, nous avons pu déterminer quelles composantes de la pensée fonctionnelle sont mises à contribution dans les situations d'apprentissage. Nous avons ainsi dressé un portrait du potentiel du manuel scolaire pour le développement de la pensée fonctionnelle. Avant toute chose, il importe de faire un bref retour sur la terminologie que nous avons utilisée dans le cadre de nos analyses.

3.1 Définitions importantes

D'abord, il faut savoir que les mots “situation” et “activité” sont intimement liés. En effet, selon Pastré (2011), « toute activité se déploie en situation » (p. 12). Nous dirons donc qu'une activité d'apprentissage se déploie lors du travail en une situation d'apprentissage. Une situation d'apprentissage comporte un contexte et une ou plusieurs activités d'apprentissages qui se rattachent à ce contexte. Le contexte peut être de nature purement mathématique, faire référence à une situation de la vie réelle ou encore à une situation complètement imaginée par les auteurs. Les activités à réaliser à travers une situation d'apprentissage sont généralement orientées par des tâches (au sens de Chevallard) que l'élève doit réaliser. Regardons un exemple concret présenté à la figure 4.

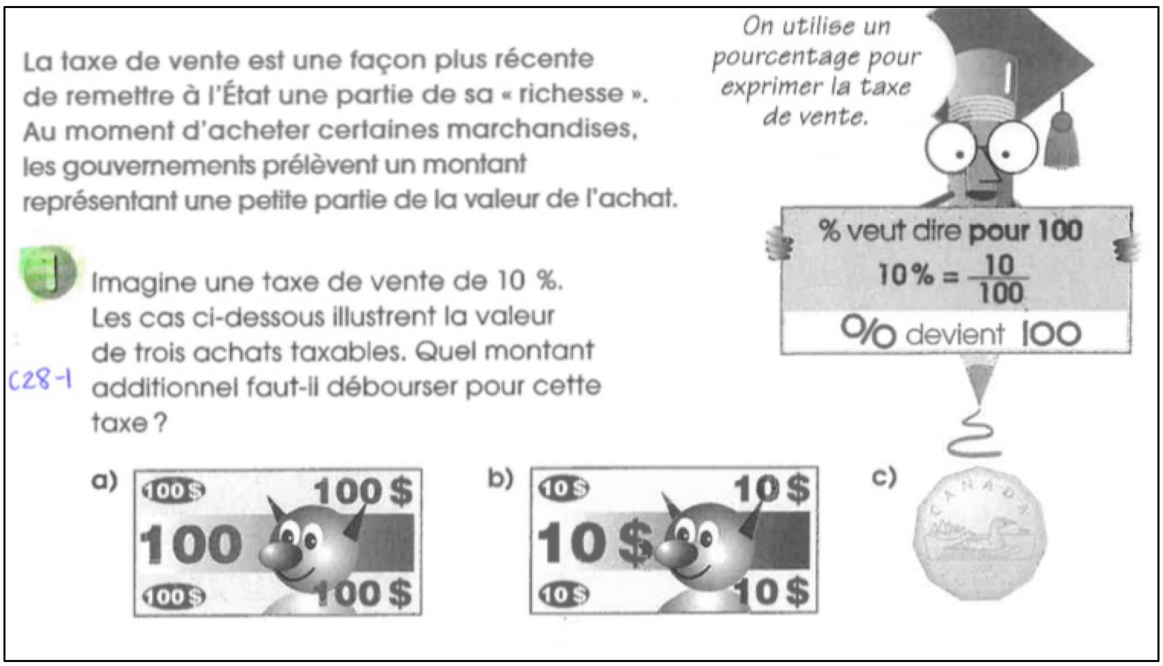


Figure 4 — Situation d'apprentissage 1-53-C28-1

La figure 4 représente une situation d'apprentissage typique du manuel scolaire. Dans celle-ci, un contexte de la vie réelle est utilisé : la taxation des produits. Cette situation d'apprentissage comprend une activité fonctionnelle que nous appelons *Étude d'une relation fonctionnelle* puisque le travail à réaliser se fait à partir d'une relation fonctionnelle déjà établie et dont tous les paramètres sont connus. Dans cette situation, trois tâches sont proposées : t_a : déterminer le montant additionnel qu'il faut débourser pour un achat taxable de 100 $; t_b : déterminer le montant additionnel qu'il faut débourser pour un achat taxable de 10 \$ et t_c : déterminer le montant additionnel qu'il faut débourser pour un achat taxable de 1 \$.

En résumé, une situation d'apprentissage comporte à la fois des indications sur le type d'activité mathématique à réaliser ainsi que sur les tâches à accomplir. Lorsque nous avons procédé à l'analyse des situations d'apprentissage, nous regardions donc à la fois l'activité d'apprentissage ainsi que les tâches.

3.2 Choix du corpus d'analyse

Pour bien analyser chaque situation d'apprentissage du manuel scolaire, trois niveaux d'analyses ont été nécessaires. En premier lieu, toutes les situations d'apprentissages ont été analysées en posant notre regard sur les activités fonctionnelles. En second lieu, nous avons analysé les tâches pour finalement décortiquer les techniques suggérées par les auteurs du manuel scolaire. Dans cette section, nous détaillons chacune des étapes de ce processus d'analyse.

3.2.1 Situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles et non-fonctionnelles

Pour faire un choix éclairé et objectif des situations d'apprentissages qui ont été analysées, nous avons d'abord procédé à une lecture attentive de toutes les situations d'apprentissage proposées dans les deux tomes du manuel scolaire choisi. Toutes ces situations ont été codifiées selon la logique suivante :

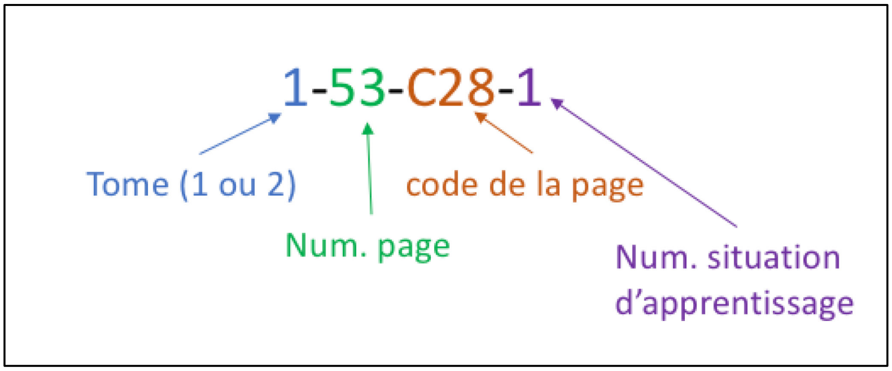


Figure 5 - Codification des situations d'apprentissage

Dans la codification présentée à la figure 5, le "code de la page" était particulièrement utile pour trouver la référence à la situation d'apprentissage dans le guide de l'enseignant.

La lecture et la codification de toutes les situations d'apprentissage du manuel scolaire nous ont permis de sélectionner uniquement les situations d'apprentissage qui se rattachaient à notre objet de recherche : la pensée fonctionnelle. Pour faire ce premier tri, nous devions pouvoir distinguer une situation d'apprentissage faisant appel à une activité fonctionnelle d'une situation d'apprentissage quelconque (dite non-fonctionnelle). Nos activités fonctionnelles étant définies (modélisation fonctionnelle, généralisation fonctionnelle et étude d'une relation fonctionnelle), un regard critique a pu être porté sur chaque situation d'apprentissage. Voici donc les trois questions qui ont guidé cette première sélection :

- La situation d'apprentissage fait-elle appel à un contexte propice à la modélisation fonctionnelle ?
- La situation d'apprentissage fait-elle appel à un contexte propice à la généralisation fonctionnelle ?
- La situation d'apprentissage met-elle en jeu une relation fonctionnelle entre deux quantités variables et incite-t-elle à étudier l'aspect de covariation ou de correspondance de cette relation ?

Nous avons conservé toute situation d'apprentissage répondant à l'une ou l'autre de ces caractéristiques. Ces situations d'apprentissage ont été appelées : situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles. À titre d'exemple, reprenons la situation d'apprentissage présentée dans la section précédente à la figure 4. À sa lecture, il est possible de constater que deux quantités variables sont mises en relation par une fonction linéaire et que la relation fonctionnelle est connue. De plus, les tâches a), b) et c) incitent à étudier l'aspect de covariation de la relation fonctionnelle. La situation d'apprentissage a donc été conservée et analysée plus en profondeur dans les étapes suivantes. À titre de contre-exemple, regardons la situation d'apprentissage présentée à la figure 6.

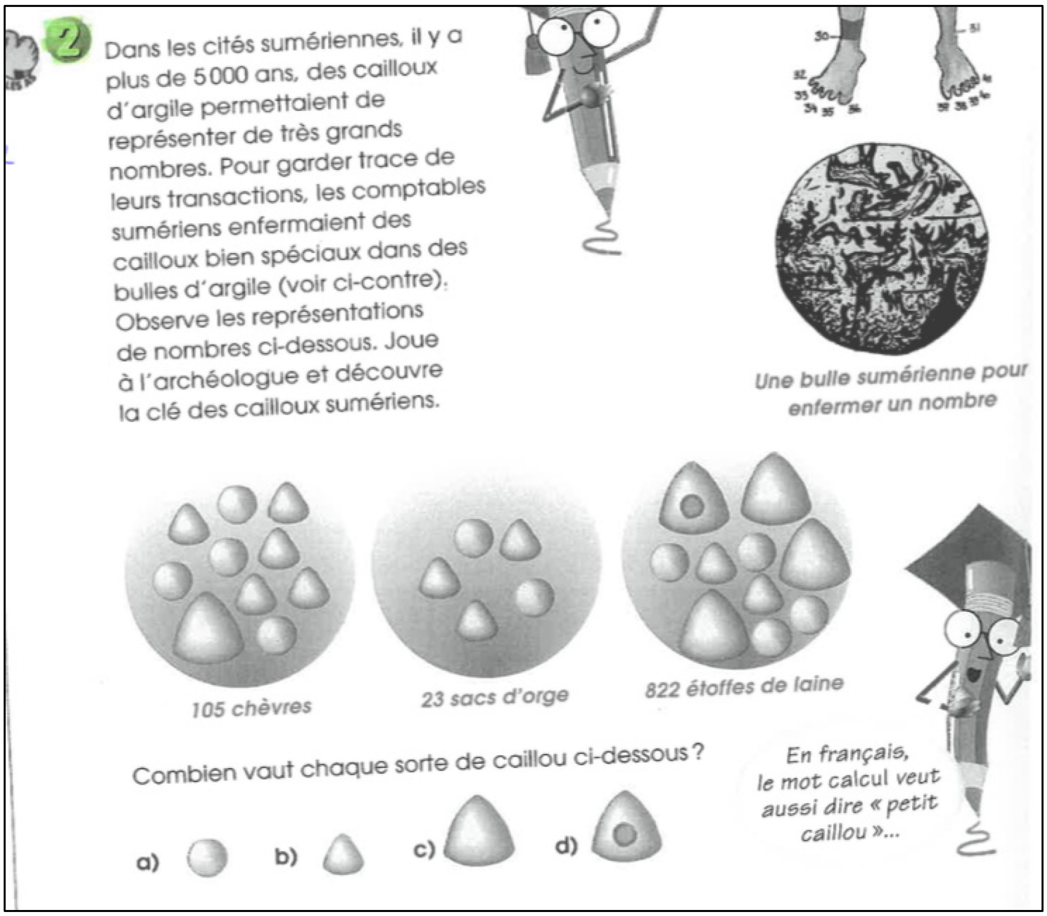


Figure 6 – Situation d'apprentissage 1-26-A1-2

Dans cette situation d'apprentissage, les valeurs à attribuer à chaque type de caillou ne sont pas des variables, mais bien des quantités inconnues. Il s'agit d'un problème de résolution d'un système d'équations à quatre inconnues. Cette situation d'apprentissage ne faisant pas appel à une activité fonctionnelle et ne répondant pas par l'affirmative à l'une de nos trois questions, elle est rejetée et ne fait pas partie du corpus d'analyse. Nous dirons d'elle qu'il s'agit d'une situation d'apprentissage non-fonctionnelle.

Tel que résumé à la figure 7, le manuel scolaire *Défi mathématique* contient au total 803 situations d'apprentissages. Le tome 1 en possède 398 alors que le tome 2 en possède 405. Après une lecture attentive, c'est un total de 80 situations d'apprentissage qui ont été classées dans la catégorie des situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles puisqu'elles faisaient appel à une activité fonctionnelle. 45 de ces situations d'apprentissage sont dans le tome 1 et 35 sont dans le tome 2. Ces situations représentent 10,1 % des situations d'apprentissage du manuel scolaire. Ce dernier contient ainsi 723 situations d'apprentissage non-fonctionnelles.

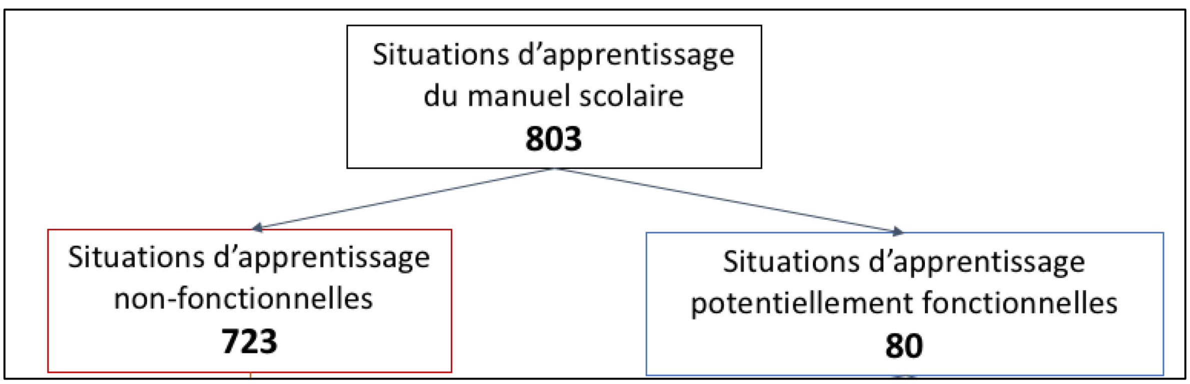
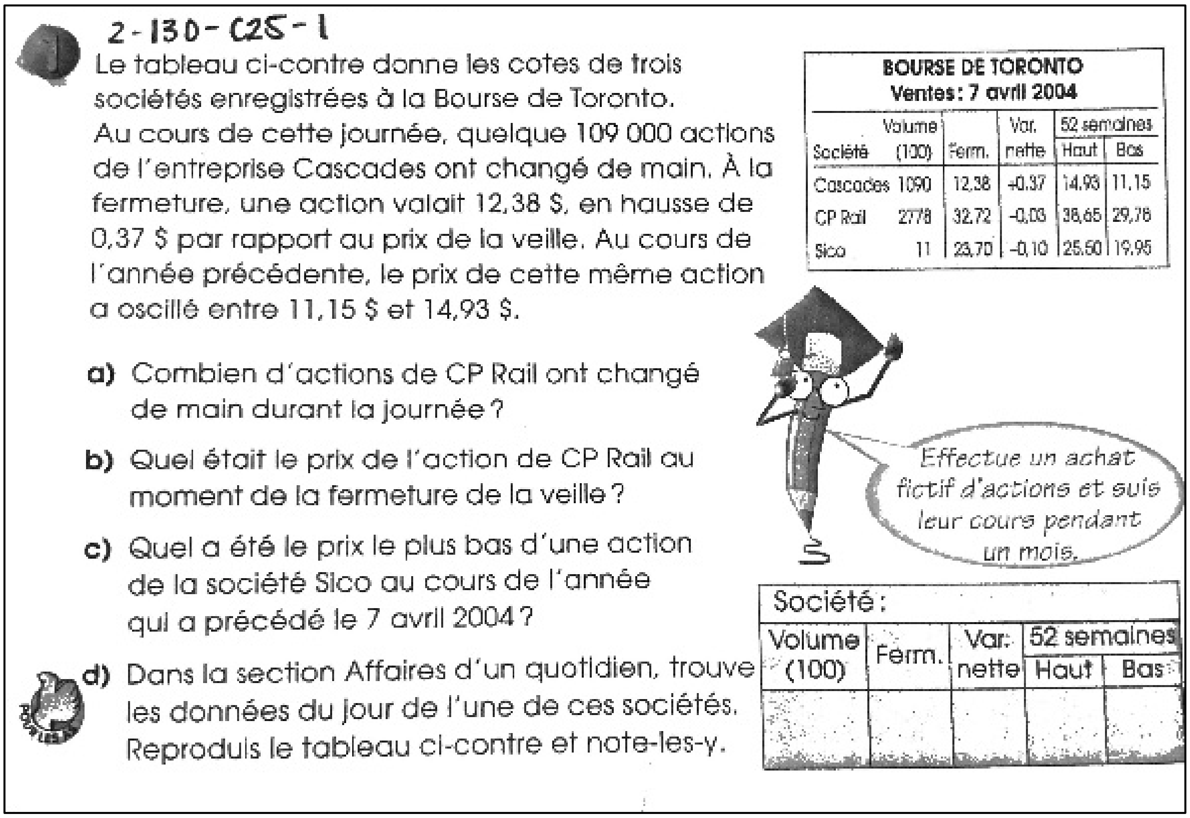


Figure 7 – Schéma des situations d'apprentissage non-fonctionnelles et potentiellement fonctionnelles

3.2.2 Les situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles sans tâche fonctionnelle ou avec tâche fonctionnelle

Dans certains cas, les situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles recensées ont un contexte porteur pour les activités fonctionnelles, mais ne comportent pas de tâches qui exploitent ce potentiel fonctionnel. Prenons pour exemple la situation d'apprentissage 2-130-C25-1 exposée à la figure 8.


2-130-C25-1

Le tableau ci-contre donne les cotes de trois sociétés enregistrées à la Bourse de Toronto. Au cours de cette journée, quelque 109 000 actions de l'entreprise Cascades ont changé de main. À la fermeture, une action valait 12,38 $, en hausse de 0,37 $ par rapport au prix de la veille. Au cours de l'année précédente, le prix de cette même action a oscillé entre 11,15 $ et 14,93 $.

BOURSE DE TORONTO
Ventes : 7 avril 2004

Société	Volume (100)	Ferm.	Var. nette	52 semaines Haut	52 semaines Bas
Cascades	1090	12,38	+0,37	14,93	11,15
CP Rail	2778	32,72	-0,03	38,65	29,76
Sico	11	23,70	-0,10	25,50	19,95

a) Combien d'actions de CP Rail ont changé de main durant la journée ?

b) Quel était le prix de l'action de CP Rail au moment de la fermeture de la veille ?

c) Quel a été le prix le plus bas d'une action de la société Sico au cours de l'année qui a précédé le 7 avril 2004 ?

d) Dans la section Affaires d'un quotidien, trouve les données du jour de l'une de ces sociétés. Reproduis le tableau ci-contre et note-les-y.

Société :

Volume (100)	Ferm.	Var. nette	52 semaines Haut	52 semaines Bas

Figure 8 – Situation d'apprentissage 2-130-C25-1

Dans cette situation d'apprentissage, la mise en contexte réfère à la Bourse et aux différentes valeurs que peut prendre une action. Ce contexte est mis à contribution dans plusieurs situations d'apprentissage du manuel. Toutefois, en regardant plus attentivement les tâches que l'élève doit faire, il est possible de constater qu'il ne s'agit que d'un exercice de repérage d'informations. Toutes les données sont connues et sont simplement représentées dans un tableau. Ainsi, bien que le contexte de cette situation d'apprentissage soit intéressant pour le développement de la pensée fonctionnelle, les tâches ne reflètent pas ce potentiel. Cette situation est donc appelée : situation d'apprentissage potentiellement fonctionnelle sans tâche fonctionnelle.

Parmi les situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles retenues, 16 situations d'apprentissage ont un contexte porteur pour les activités fonctionnelles, mais ne comportent pas de tâche fonctionnelle. Le corpus d'analyse à partir duquel nous appliquerons l'analyse praxéologique est donc constitué des 64 situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles restantes. La figure 9 permet de résumer les informations que nous venons d'exposer jusqu'à présent.

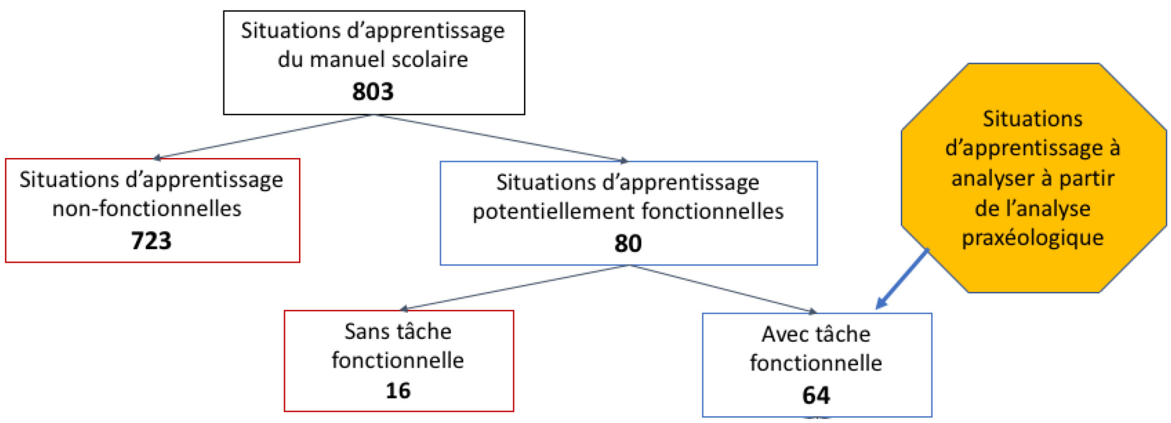


Figure 9 – Schéma de la hiérarchisation des situations d'apprentissage

Il est à noter que toutes les situations d'apprentissage pour lesquelles un doute persistait ont été revues avec l'équipe de direction. De nombreuses discussions ont permis de valider le processus et de nous assurer de sa rigueur.

3.3 Analyse praxéologique des situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles

Le corpus des situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles avec tâche(s) fonctionnelle(s) étant maintenant défini, il est temps de présenter les éléments méthodologiques qui nous ont permis de répondre à nos diverses questions spécifiques de recherche. En ce qui concerne les deux premières questions portant respectivement sur la place des activités fonctionnelles, des types de tâches et des techniques fonctionnelles qui sont promus par le manuel scolaire, nous nous référons à l'analyse praxéologique.

3.3.1 Analyse des tâches

Premièrement, toute situation potentiellement fonctionnelle a été analysée de manière à faire ressortir les tâches qui interviennent dans chacune d'elles. Ceci nous a permis de dégager les principaux types de tâches de nos praxéologies de référence qui se retrouvent dans le manuel scolaire et d'établir de quelle manière les activités fonctionnelles sont exploitées (questions spécifiques de recherche 1 et 2). Par exemple, regardons la traduction des tâches pour la situation d'apprentissage 1-103-B12-2 présentée à la figure 10.

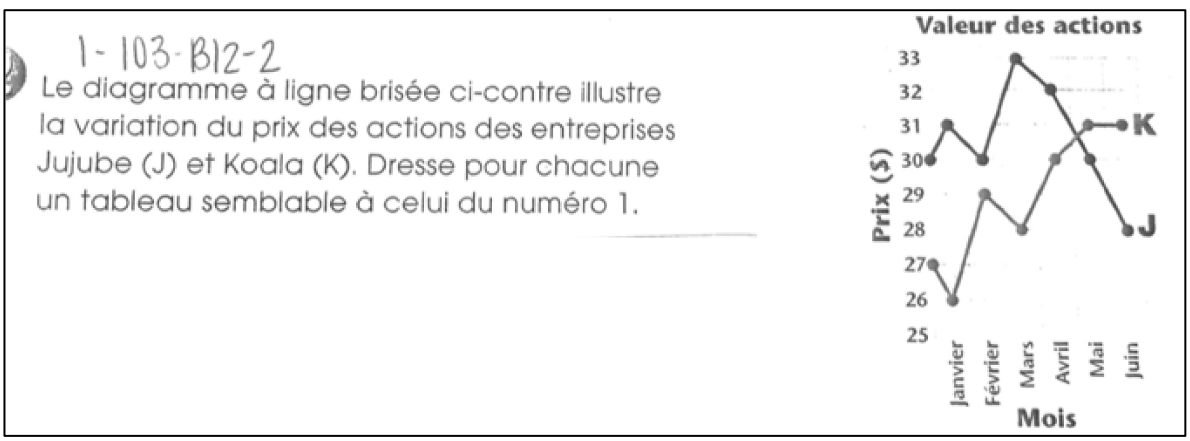


Figure 10 – Situation d'apprentissage 1-103-B12-2

D'abord, la situation présentée repose sur une activité de modélisation fonctionnelle. Nous nous référons donc aux types de tâches de notre praxéologie de référence concernant cette activité. Deux tâches identiques sont à faire dans cette situation d'apprentissage : elles consistent à représenter la valeur des actions de chacune des deux entreprises dans le registre tabulaire. Les tâches t_J *: Représenter les données présentées dans le registre graphique* *pour le prix des actions de l'entreprise Jujube dans le registre tabulaire* et t_K *: Représenter les données présentées dans le registre graphique pour le prix des actions de l'entreprise Koala dans le registre tabulaire* se rattachent au type de tâches $T_{R\text{-}T}$: *Représenter les données dans le registre tabulaire*.

Au final, ce sont 309 tâches qui ont été répertoriées dans nos 64 situations d'apprentissage à l'étude. Le détail de leur répartition sera présenté dans le chapitre suivant portant sur les résultats de l'analyse.

3.3.2 Analyse des techniques

Deuxièmement, nous avons examiné les techniques proposées par les auteurs du manuel scolaire. Pour ce faire, nous avons regardé à la fois les éléments présentés dans le manuel scolaire et dans le guide de l'enseignant pour la résolution des diverses tâches. Nous avons ainsi pu dresser un portrait des praxéologies relatives aux activités fonctionnelles présentes dans le manuel scolaire. Les techniques qui s'appuient sur un discours technologico-théorique relatif au concept de fonction, comme celles présentées dans notre analyse *a priori*, ont été appelées : techniques fonctionnelles.

Cette seconde phase d'analyse nous a permis de distinguer trois types de situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles avec tâches fonctionnelles : celles qui sont réellement actualisées par les techniques proposées ; celles qui ne le sont pas et celles pour lesquelles aucune technique n'est suggérée par les auteurs (question spécifique de recherche 2).

3.3.2.1 Situation à potentiel fonctionnel non-actualisé

Comme les prescriptions ministérielles ne mentionnent pas explicitement la pensée fonctionnelle, les techniques proposées par les auteurs du manuel scolaire pour la résolution des tâches pourraient ne pas s'appuyer sur un discours technologico-théorique relatif au concept de fonction. En effet, un contexte fonctionnel peut être donné à une situation d'apprentissage de manière à fournir un sens à des données dont le traitement ne nécessite pourtant que des manipulations arithmétiques. Concrètement, regardons l'exemple présenté à la figure 11.

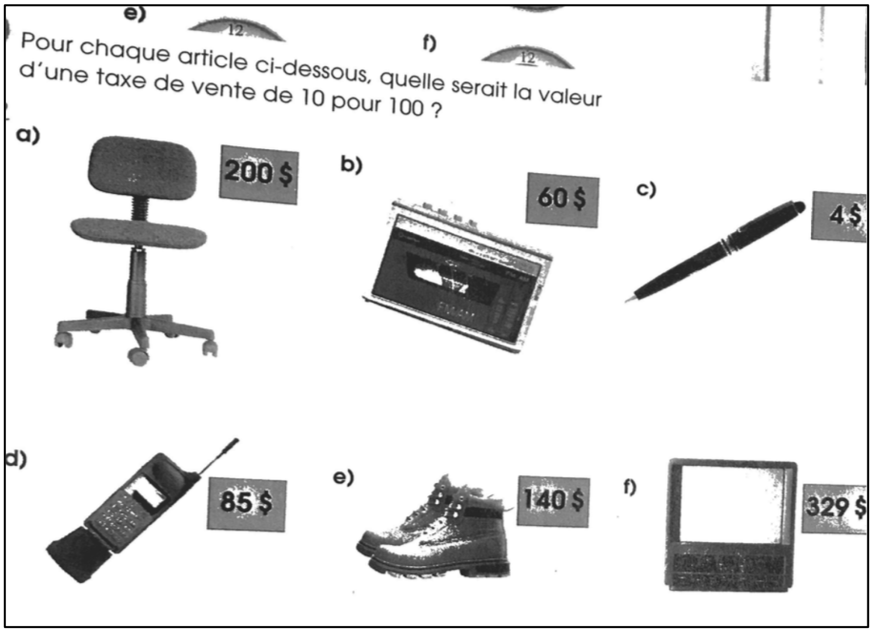


Figure 11 – Situation d'apprentissage 1-53-C28-2

Dans cette situation d'apprentissage relative à l'étude d'une relation fonctionnelle, les six tâches relèvent de la recherche d'une valeur manquante. Il faut en effet déterminer quelle serait la valeur d'une taxe de vente de 10 % appliquée à chacun des items en vente. La technique suggérée par les auteurs dans le guide de l'enseignant est celle de la décomposition du prix des achats en tranches de 100 \$, de 10 \$ et de 1 \$ pour faciliter le calcul de la taxe. Les auteurs donnent l'exemple d'une taxe de 8 %. Il faudrait alors prévoir 8 \$ pour chaque tranche de 100 \$, 0,80 \$ pour chaque tranche de 10 \$ et 0,08 \$ pour chaque tranche de 1 \$. Appliquée à la situation présentée, le calcul à faire pour une taxe de 10 % associée à un achat de 329 \$ est le suivant : $3 \times 10\$ + 2 \times 1\$ + 9 \times 0{,}10\ \$ = 32{,}9\ \$$. Cette technique réfère ainsi à des stratégies de calcul efficace et non pas à la relation fonctionnelle qu'il est possible d'établir entre le montant des ventes et le montant de la taxe. Comme le discours technologico-théorique associé à la technique présentée par les auteurs ne réfère pas à des éléments fonctionnels, nous en concluons que la technique n'est pas fonctionnelle. Cette situation d'apprentissage est ainsi classée comme étant une situation à potentiel fonctionnel non-actualisé.

Bien évidemment, le guide de l'enseignant ne présente que des suggestions pour l'utilisation de techniques. Il est donc possible qu'un enseignant utilise une autre technique que celle suggérée. Toutefois, comme nous ne pouvons pas nous projeter dans toutes les classes et observer directement le travail réalisé, le meilleur moyen pour déterminer quelle technique pourrait être favorisée par les enseignants est de nous fier aux suggestions des auteurs. Ainsi, si une technique présentée ne réfère pas à l'utilisation du concept de fonction ou à l'un de ses concepts connexes, comme dans l'exemple fourni, la situation d'apprentissage sera dite à potentiel fonctionnel non-actualisé. Parmi les 64 situations d'apprentissage, 17 ont été classées dans cette catégorie. Le détail de leur répartition sera présenté dans le chapitre suivant portant sur les résultats de l'analyse.

Encore une fois, toute situation d'apprentissage dont l'analyse apparaissait nébuleuse a été revue avec l'équipe de direction.

3.3.2.2 Situation potentiellement fonctionnelle sans technique suggérée

Dans certains cas, aucune technique n'est présentée dans le manuel scolaire ou dans le guide de l'enseignant. Comme nous ne pouvons pas prétendre connaître les intentions des auteurs, nous ne pouvons pas affirmer qu'une technique fonctionnelle sera favorisée pour la résolution de ces situations. De telles situations ne resteront donc que potentiellement fonctionnelles. Sur les 64 situations d'apprentissage à l'étude, 29 ne présentent pas de technique suggérée par les auteurs.

3.3.2.3 Situations d'apprentissage fonctionnelles

Finalement, les 17 situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles avec tâche fonctionnelle restantes sont des situations pour lesquelles les techniques fournies par les auteurs du manuel scolaire reposent sur un discours technologico-théorique relatif aux fonctions. Les résultats d'analyse de ces situations seront présentés plus en détail dans le chapitre suivant.

3.3.3 Résumé des différents types de situations d'apprentissage

Afin de clarifier les différentes nomenclatures utilisées pour différencier les situations d'apprentissage, un schéma récapitulatif est présenté à la figure 12.

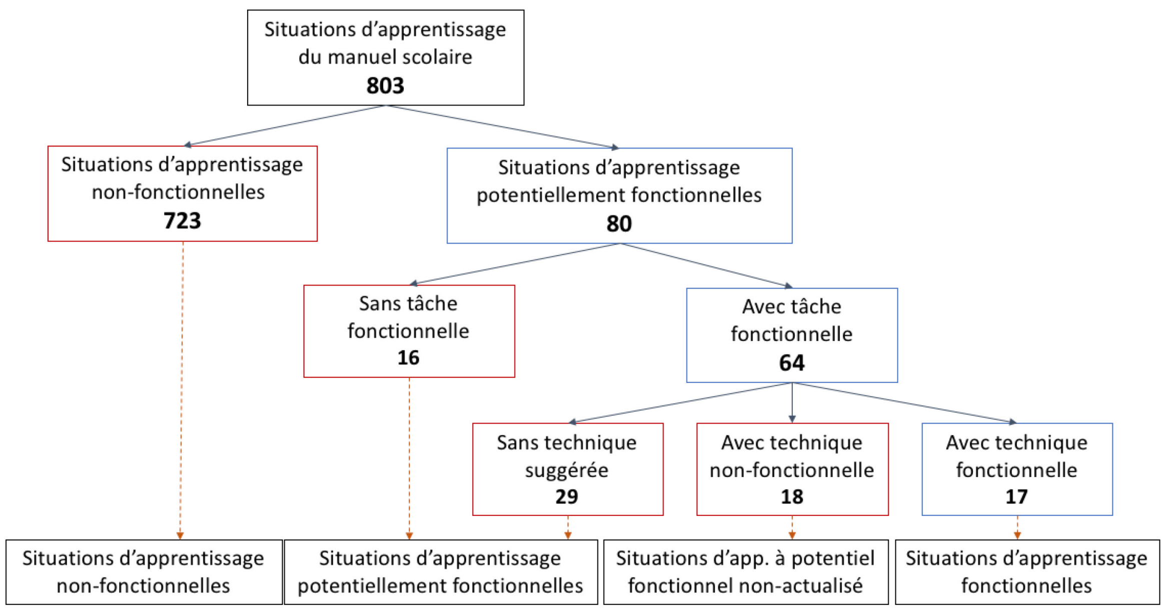


Figure 12 – Schéma récapitulatif des différents types de situations d'apprentissage

À partir de ce schéma, nous pouvons voir qu'au final, nous ferons la distinction entre quatre types de situations d'apprentissage. D'abord, les situations d'apprentissage non-fonctionnelle sont celles qui ne réfèrent pas à une activité fonctionnelle. Ensuite, les situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles sont celles dont le contexte réfère à une activité fonctionnelle, mais dont la ou les tâches n'exploitent pas ce potentiel. Cette catégorie inclut également les situations potentiellement fonctionnelles pour lesquelles aucune technique n'est suggérée pour la résolution des tâches fonctionnelles. Viennent par la suite les situations d'apprentissage à potentiel fonctionnel non-actualisé, c'est-à-dire les situations pour lesquelles les techniques proposées par les auteurs n'exploitent pas de concepts ou de raisonnements fonctionnels. Finalement, les situations d'apprentissage fonctionnelles sont celles qui ont tous les ingrédients gagnants pour favoriser le développement de la pensée fonctionnelle : leur contexte réfère à une activité fonctionnelle, les tâches sont fonctionnelles et les techniques font appel au concept de fonction de manière directe ou indirecte.

3.4 Analyser la présence des différentes composantes de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle dans les situations d'apprentissage

Notre caractérisation de la pensée fonctionnelle a apporté plusieurs éléments de précision sur ses différentes composantes. Dans notre analyse, nous souhaitions donc mettre en lumière quelles composantes de la pensée fonctionnelle sont mises de l'avant par le manuel scolaire à l'étude. Pour les 17 situations d'apprentissage fonctionnelles répertoriées, nous avons donc comptabilisé quels types de raisonnements étaient mis à contribution, quels concepts fonctionnels étaient sollicités et quels registres de représentation sémiotiques étaient mis de l'avant. Pour réaliser cette analyse, nous avons posé notre regard à la fois sur les activités fonctionnelles, les tâches et les techniques suggérées. Nous avons ensuite utilisé une grille comportant tous les éléments de notre cadre de référence afin de comptabiliser les occurrences de chacune des composantes de la pensée fonctionnelle.

3.5 Interprétation et synthèse des résultats

L'analyse praxéologique nous a permis d'identifier les *praxis*, c'est-à-dire les techniques qui permettent de réaliser certaines tâches et les *logos* qui sont les technologies et les théories qui permettent de décrire, expliquer et légitimer les techniques utilisées (Wozniak, 2012). À la lumière des analyses réalisées, le quatrième chapitre présente les principaux résultats de notre recherche. L'interprétation et la synthèse des résultats seront ensuite faites de manières narrative et visuelle dans le chapitre 5 afin de répondre à nos diverses questions spécifiques de recherche.

QUATRIEME CHAPITRE
PRESENTATION DES RESULTATS

Ce quatrième chapitre aborde les principaux résultats de recherche obtenus à la suite de l'analyse praxéologique des situations potentiellement fonctionnelles recensées dans le manuel scolaire du troisième cycle du primaire *Défi mathématique* (Lyons et Lyons, 2005*a*). Nous débutons cette présentation en exposant comment les activités fonctionnelles se manifestent. Par la suite, nous regardons ce que dévoile l'analyse praxéologique au regard des genres de tâches et des types de tâches de nos praxéologies de référence qui se retrouvent concrètement dans les situations d'apprentissage à l'étude. Nous exposons également quelles techniques sont fournies dans le manuel scolaire ou dans le guide de l'enseignant, puis nous analysons comment ces techniques nous permettent de distinguer les situations fonctionnelles des situations à potentiel fonctionnel non actualisé. Finalement, nous présentons les résultats de la dernière phase d'analyse qui nous ont permis de déterminer quelles composantes de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle se retrouvent dans les techniques fonctionnelles suggérées par les auteurs.

Il est à noter que ce quatrième chapitre propose une description de nos résultats. Ceux-ci seront analysés dans le cinquième chapitre afin de répondre à nos questions de recherche.

1. LES ACTIVITES FONCTIONNELLES

D'abord, regardons comment sont réparties les activités fonctionnelles qui se retrouvent dans les 64 situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles comportant des tâches fonctionnelles.

Tableau 4

Répartition des activités fonctionnelles

Activité fonctionnelle	**Nombre d'activités**	**Pourcentage (%)**
Modélisation fonctionnelle	25	39,1
Généralisation fonctionnelle	22	34,4
Étude d'une relation fonctionnelle	17	26,5
Total	64	100

À partir des données présentées dans le tableau 4, il est possible de constater que chacune des activités fonctionnelles est représentée de manière significative dans le manuel scolaire. Concrètement, ce sont 25 situations d'apprentissages qui mobilisent la modélisation fonctionnelle (39,1%), 22 qui utilisent plutôt des tâches relatives à l'activité de généralisation fonctionnelle (34,4%) et 17 qui portent sur l'étude d'une relation fonctionnelle (26,5%).

En ce qui concerne la répartition des activités entre les deux tomes du manuel scolaire, nous pouvons la qualifier de similaire. En fait, pour les activités de modélisation fonctionnelle, ce sont 15 activités qui se retrouvent dans le tome 1 contre 10 dans le tome 2. Pour les activités de généralisation fonctionnelle, 13 activités sont dans le tome 1 contre 9 dans le tome 2. Finalement, pour les activités d'étude d'une relation fonctionnelle, 9 activités sont dans le tome 1 et 8 dans le tome 2.

Un autre aspect à commenter est celui de la répartition des activités fonctionnelles dans les différents modules du manuel scolaire. En effet, les deux tomes du manuel scolaire *Défi mathématique* sont divisés en différents modules qui regroupent les contenus similaires entre eux. Chaque module a donc sa vocation et vise l'acquisition de compétences différentes.

Tableau 5

Répartition des activités fonctionnelles dans les modules du manuel scolaire

Activités fonctionnelles	**Modules du manuel scolaire**					
	Logique	Numération	Fractions	Jeux de nombres	Géométrie	Méli-mélo
Modélisation fonctionnelle	0	2	0	16	3	4
Généralisation fonctionnelle	0	0	0	4	6	12
Étude d'une relation fonctionnelle	0	6	3	3	2	3
Total	0	8	3	23	11	19

Avec le tableau 5, nous pouvons d'abord voir que la grande majorité des activités fonctionnelles se retrouvent dans les trois derniers modules du manuel (*Jeux de nombres*, *Géométrie* et *Méli-Mélo*). Les activités de modélisation fonctionnelle se retrouvent principalement dans le module *Jeux de nombre* dont la finalité est de développer des images mentales puissantes relatives au calcul efficace (Lyons et Lyons, 2005*b*). Les situations d'apprentissage de ce module sont notamment utilisées pour modéliser les propriétés de la multiplication et pour l'apprentissage de la résolution de problème à l'aide de contextes réels. Ainsi, même si les compétences à acquérir visent de manière plus explicite le calcul arithmétique, il s'agit d'un module qui met en valeur des contextes porteurs pour la modélisation fonctionnelle. La généralisation fonctionnelle, pour sa part, a la majorité de ses activités dans la section *Méli-Mélo* qui est considérée comme une banque de problèmes variés. Selon les auteurs, c'est le module qui favorise le mieux la compétence disciplinaire 1 : Résoudre des situations-problèmes (*Ibid.*). Pour ce qui est des activités d'étude d'une relation fonctionnelle, la répartition est similaire pour les différentes sections outre la section logique.

Le portrait que nous venons de dresser concernant les activités fonctionnelles met en lumière une répartition de nos trois activités fonctionnelles comparable dans les deux tomes et une prédominance de certaines activités fonctionnelles dans les différents modules. Ces constats nous permettront de commenter plus en profondeur certains aspects de nos analyses dans les sections suivantes. Regardons maintenant les résultats de l'analyse praxéologique réalisée.

2. RÉSULTATS DE L'ANALYSE PRAXÉOLOGIQUE

2.1 Les genres de tâches, les types de tâches et les tâches fonctionnelles

Avec l'analyse praxéologique, nous avons pu dégager les différentes tâches à réaliser pour chacune des situations d'apprentissage fonctionnelles à l'étude. Ce faisant, nous avons dressé un portrait des genres de tâches et des types de tâches qui sont exploités dans nos différentes activités fonctionnelles.

Tel que mentionné dans le chapitre précédent, pour une même situation d'apprentissage, plusieurs tâches pouvaient être observées. Ainsi, pour les 64 situations d'apprentissage, ce sont 309 tâches qui ont été recensées et étudiées. Le tableau 6 présente la répartition de celles-ci dans nos 3 activités fonctionnelles. Ainsi, 118 tâches sont des tâches relatives à la modélisation fonctionnelle, 113 se rattachent plutôt à la généralisation fonctionnelle et 78 portent sur l'étude d'une relation fonctionnelle.

Tableau 6

Répartition des tâches fonctionnelles dans les activités fonctionnelles

Activité fonctionnelle	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Modélisation fonctionnelle	118	38,2
Généralisation fonctionnelle	113	36,6
Étude d'une relation fonctionnelle	78	25,2
Total	309	100

Cette étape du protocole d'analyse est une étape intermédiaire qui nous permettra ensuite de nous concentrer sur les tâches accompagnées de techniques fonctionnelles. Ces tâches seront accompagnées d'exemples permettant d'illustrer la décomposition des tâches. Pour l'instant, il n'est donc pas pertinent d'illustrer chaque type de tâches exploités par un exemple de tâche.

2.1.1 La répartition des tâches pour les activités de modélisation fonctionnelle

En premier lieu, penchons-nous plus attentivement sur les 118 tâches relatives à l'activité de modélisation fonctionnelle. Le tableau 7 présente la densité des genres de tâches du manuel scolaire préalablement définis dans nos praxéologies de références au chapitre 2. L'annexe A présente de manière plus détaillée la répartition des différentes situations d'apprentissage dont les tâches se retrouvent dans chaque catégorie. Tel que mentionné dans le chapitre 3, pour chaque situation d'apprentissage, toute tâche recensée a été associée à son type de tâches et, par le fait même, à son genre de tâches. Comme plusieurs tâches pouvaient être recensées à l'intérieur d'une même situation d'apprentissage, nous les avons comptabilisées une à une pour avoir un meilleur portrait de la densité de la présence de nos différents genres de tâches et types de tâches dans le manuel.

Tableau 7

Densité des genres de tâches de la modélisation fonctionnelle dans le manuel scolaire

Genre de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Identifier les différentes données de la situation réelle	13	11,0
Générer des données	5	4,2
Organiser les données	0	0
Déterminer la relation fonctionnelle entre les quantités variables	62	52,6
Représenter la relation fonctionnelle	38	32,2
Prédire des données à partir du modèle fonctionnel établi ou le comportement du modèle	0	0
Total	118	100

Dans ce tableau, nous pouvons constater que le genre de tâches *Déterminer* est largement exploité, tout comme le genre de tâches *Représenter* qui est particulièrement bien exploité par les différentes tâches. En effet, ce sont respectivement 62 tâches sur 118 (52,6%) et 38 tâches sur 118 (32,2%) qui mobilisent l'un ou l'autre de des types de tâches associés à ces genres de tâches. En ce qui a trait à ce dernier, ce ne sont toutefois que 9 situations d'apprentissages sur les 25 situations relatives à la modélisation fonctionnelle qui mobilisent la représentation d'une relation fonctionnelle.

Examinons maintenant les tableaux 8, 9, 10 et 11 qui présentent pour leur part la densité des différents types de tâches pour chaque genre de tâches dont le nombre de tâches associé est différent de zéro (0).

Tableau 8

Densité des types de tâches du genre de tâches *Identifier*

Type de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Identifier les variables en jeu dans la situation réelle	0	0
Identifier le lien de dépendance entre les quantités variables	1	7,7
Identifier une tendance entre les données	10	76,9
Identifier le sens de la variation	2	15,4
Total	13	100

Tableau 9

Densité des types de tâches du genre de tâches *Générer*

Type de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Générer des données à partir de la description de la situation réelle	5	100
Générer des données à partir d'une expérimentation	0	0
Total	5	100

Tableau 10

Densité des types de tâches du genre de tâches *Déterminer*

Type de tâches	Nombre de tâches	Pourcentage (%)
Déterminer la relation de correspondance entre les quantités variables	0	0
Déterminer la relation de covariation entre les quantités variables	0	0
Déterminer le modèle fonctionnel le plus approprié à la situation réelle	10	16,1
Déterminer une valeur manquante à partir du modèle fonctionnel	50	80,7
Déterminer les limites du modèle fonctionnel	2	3,2
Total	62	100

Tableau 11

Densité des types de tâches du genre de tâches *Représenter*

Type de tâches	Nombre de tâches	Pourcentage (%)
Représenter les données dans le registre graphique	17	44,7
Représenter les données dans le registre tabulaire	4	10,5
Représenter la courbe du modèle fonctionnel qui se rapproche le plus des données dans le registre graphique	2	5,3
Représenter le modèle fonctionnel dans divers registres de représentation	15	39,5
Total	38	100

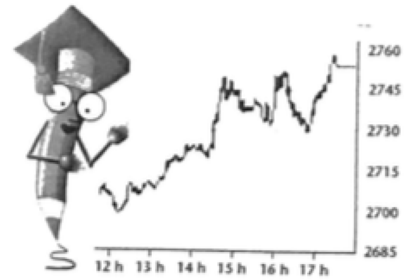
Le premier constat que nous pouvons faire en regardant la répartition des 118 tâches présentées dans les tableaux 8, 9, 10 et 11 est que plusieurs types de tâches représentant des concepts fonctionnels essentiels ne sont pas exploités dans le manuel scolaire. En effet, nous n'avons relevé aucune tâche s'intéressant à l'étude de la covariation ou de la correspondance. De plus, alors que le fait d'effectuer des prédictions à l'aide d'un modèle fonctionnel est un aspect important de la modélisation, aucune tâche ne s'y réfère ici. Dans un même ordre d'idées, générer des données à partir d'une expérimentation et organiser des données dans une table de valeurs ne font pas partie des types de tâches exploités par les auteurs du manuel. Finalement, l'identification des variables en jeu ne se retrouve pas non plus, de manière explicite, dans les tâches des situations d'apprentissage étudiées.

Tel que discuté, les activités de modélisation fonctionnelle se retrouvent majoritairement dans le module *Jeux de nombres* qui porte essentiellement sur le calcul efficace. Il n'est donc pas surprenant de constater que 50 tâches portent sur la détermination d'une valeur manquante qui nécessite d'appliquer les règles usuelles de calcul. Par exemple, la situation d'apprentissage 1-103-B12-1 de la figure 13 contient 14 tâches de ce type puisque la première chose à faire dans cette activité est de trouver les données manquantes du tableau en effectuant des additions ou des soustractions (A à N). Ce type de tâches est représenté par 42,4% des tâches recensées.

1- 103 · B12-1

Le tableau ci-dessous décrit les variations subies par les actions boursières de quelques entreprises. Imagine que ces actions ont toutes été émises le 1er janvier de l'année dernière.

Les colonnes indiquent la variation subie par chaque action, en dollars, à la fin de chacun des six premiers mois qui ont suivi.



Entreprises et valeur de l'action le 1er janvier	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Variation totale	Prix au 30 juin
ALADIN 26 $	+1	+2	+1	−2	−3	+2	+1	27 $
BIOMED 30 $	−2	−1	+3	−2	−1	+1	A	B
CHOCO 25 $	−1	−3	0	+2	+3	+4	C	D
DÉCO 24 $	−1	+1	+2	−2	0	−3	E	F
EMPIRE 22 $	0	+4	−1	−2	+3	G	+6	H
FOU-RIRE 26 $	−1	−1	−2	+3	I	+3	−1	J
GALOPIN 48 $	K	−2	0	−1	−4	+1	L	44 $
HOURRA 43 $	+2	M	+2	+2	−1	−3	N	42 $

a) Trouve les données manquantes.

b) Quelle action a connu la plus forte hausse en dollars, de janvier à juin ?

c) Quelle action a subi la plus forte baisse en dollars, durant cette même période ?

d) Laquelle des entreprises Déco ou Galopin a connu la pire performance selon les données du tableau ci-dessus ? Explique pourquoi.

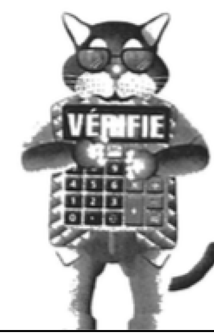


Figure 13 – Situation d'apprentissage 1-103-B12-1

Tous les éléments présentés ci-dessus concernant les activités de modélisation fonctionnelle nous permettent de conclure qu'une grande importance est accordée à la détermination d'une valeur manquante (associée aux règles de calcul), que des concepts fonctionnels importants ne sont pas mobilisés dans les tâches du manuel scolaire *Défi mathématique* (2005*a*) et que des aspects du processus de modélisation ne sont pas mis à profit. Examinons maintenant la répartition des tâches relatives à la généralisation fonctionnelle.

2.1.2 La répartition des tâches pour les activités de généralisation fonctionnelle

De la même manière que pour la modélisation fonctionnelle, le tableau 12 présente la densité des genres de tâches du manuel scolaire préalablement définis dans nos praxéologies de références au chapitre 2. L'annexe B montre pour sa part la répartition des 113 tâches relevées dans les 22 activités de généralisation fonctionnelle recensées.

Tableau 12

Densité des genres de tâches de la généralisation fonctionnelle dans le manuel scolaire

Genre de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Identifier la relation fonctionnelle	18	15,9
Formuler la relation fonctionnelle généralisée	12	10,6
Rechercher un autre couple de valeurs	82	72,6
Justifier la relation fonctionnelle établie	1	0,9
Total	113	100

Dans le tableau 12, nous voyons qu'un genre de tâches est particulièrement bien représenté dans les activités de généralisation fonctionnelle : *Rechercher un autre couple de valeurs*. Le genre de tâches *Identifier* est également bien présent dans les tâches (15,9%) et se concentre surtout autour de tâches qui nécessitent d'identifier une régularité à partir de quelques instanciations tel qu'indiqué dans le tableau 13. La justification, dernière étape du processus de généralisation, est peu exploitée dans le manuel scolaire. En effet, une seule tâche réfère explicitement à la validation de la formule mathématique par des exemples spécifiques.

Examinons maintenant les tableaux 13, 14, 15 et 16 qui présentent maintenant la densité des différents types de tâches pour chaque genre de tâches de la généralisation fonctionnelle.

Tableau 13

Densité des types de tâches du genre de tâches *Identifier*

Type de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Identifier la régularité à partir de quelques instanciations (couples)	15	83,3
Identifier la relation fonctionnelle à partir de quelques instanciations (couples)	2	11,1
Identifier une régularité à partir de dessins	1	5,6
Total	18	100

Tableau 14

Densité des types de tâches du genre de tâches *Formuler*

Type de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Formuler la relation fonctionnelle généralisée en mots	3	25
Formuler la relation fonctionnelle généralisée à l'aide d'un langage symbolique	0	0
Formuler la relation fonctionnelle généralisée à l'aide du langage algébrique	9	75
Total	12	100

Tableau 15

Densité des types de tâches du genre de tâches *Rechercher*

Type de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Rechercher un couple de valeurs proche	62	75,6
Rechercher un couple de valeurs lointain	18	22,0
Rechercher le cas (couple de valeurs) général	2	2,4
Total	82	100

Tableau 16

Densité des types de tâches du genre de tâche *Justifier*

Type de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Justifier la relation fonctionnelle généralisée à l'aide d'un exemple générique	1	100
Justifier la relation fonctionnelle généralisée en se basant sur un argument intellectuel	0	0
Justifier la relation fonctionnelle généralisée en faisant la preuve formelle	0	0
Total	1	100

En ce qui concerne le genre de tâches *Rechercher,* les tâches portant sur la recherche d'un couple de valeurs proche, la recherche d'un couple de valeurs lointain et la recherche d'un couple général représentent 72,5% des tâches de cette activité fonctionnelle; une majorité de celles-ci étant associée à la recherche d'un couple de valeurs proche. Les tâches relatives à la recherche de couple de valeurs sont particulièrement importantes pour la conception du processus de généralisation fonctionnelle puisqu'elles nécessitent d'avoir préalablement pressenti une régularité et de la prolonger. Il n'est donc pas surprenant que la majorité (60,9%) des situations d'apprentissage portant sur la généralisation fonctionnelle exploitent l'un ou l'autre de ces types de tâches.

En ce qui concerne l'étape de formulation du processus de généralisation, quelques tâches s'y réfèrent et une majorité d'entre elles insistent sur l'utilisation du langage algébrique ou analytique plutôt que sur la formulation de la régularité en mots.

Le portrait des activités de généralisation fonctionnelle que nous venons de dresser met en lumière la grande place accordée à la recherche de couple de valeurs. Soulignons que les deux premières étapes du processus de généralisation (identifier et formuler) sont plus exploitées que la troisième étape qui consiste à justifier la généralité trouvée. Regardons finalement les tâches relatives à l'étude d'une relation fonctionnelle.

2.1.3 La répartition des tâches pour les activités d'étude d'une relation fonctionnelle

Notre dernière activité fonctionnelle est celle d'étude d'une relation fonctionnelle. À l'image des deux activités précédentes, le tableau 17 permet de mieux cerner la densité des divers genres de tâches recensés. L'annexe C permet d'observer la répartition des 78 tâches relevées dans les activités d'étude d'une relation fonctionnelle.

Tableau 17

Densité des genres de tâches d'étude d'une relation fonctionnelle dans le manuel scolaire

Genre de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Déterminer différentes composantes de la relation fonctionnelle	75	96,2
Décrire le lien de covariation ou de correspondance entre les quantités variables	0	0
Représenter la relation fonctionnelle dans divers registres de représentation	0	0
Opérer sur les relations fonctionnelles	3	3,8
Total	78	100

Examinons maintenant les tableaux 18 et 19 qui présentent la densité des différents types de tâches pour les deux genre de tâches exploités.

Tableau 18

Densité des types de tâches du genre de tâche *Déterminer*

Type de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Déterminer les caractéristiques de la relation fonctionnelle	0	0
Déterminer la fonction réciproque si elle existe	0	0
Déterminer (reconnaître) la relation fonctionnelle à partir d'une représentation dans l'un ou l'autre des registres de représentation	0	0
Déterminer une valeur manquante	75	100

Total	75	100

Tableau 19

Densité des types de tâches du genre de tâche *Opérer*

Type de tâches	**Nombre de tâches**	**Pourcentage (%)**
Opérer sur les fonctions par l'addition de fonctions	1	33,3
Opérer sur les fonctions par la soustraction de fonctions	0	0
Opérer sur les fonctions en faisant le produit de fonctions	0	0
Opérer sur les fonctions en faisant le quotient de fonctions	0	0
Opérer sur les fonctions par la composition de fonctions	0	0
Opérer sur un système d'équations en préservant la relation d'équivalence	2	66,7
Total	3	100

L'analyse des tâches relatives à l'activité d'étude d'une relation fonctionnelle a permis de répertorier 78 tâches. Or, en observant les tableaux 17 et 18, nous pouvons constater rapidement que pratiquement toutes ces tâches sont associées au même type de tâches : $T_{DÉT\text{-}V}$: Déterminer une valeur manquante. L'annexe C nous montre que ce sont en effet 14 situations d'apprentissage sur 17 qui utilisent ce type de tâches. Comme pour les tâches relatives à la détermination d'une valeur manquante pour la modélisation fonctionnelle, nous pouvons préciser que la recherche d'une valeur manquante implique des procédés de calculs efficaces. Pensons notamment aux situations d'apprentissage relatives à la notion de pourcentage, comme celle présentée à la figure 14, qui sont intéressantes d'une part pour étudier une fonction linéaire et d'autre part pour appliquer des stratégies de calculs. Nous pouvons donc en déduire que le but premier de ces situations d'apprentissage est plutôt d'exploiter une situation fonctionnelle pour les biens du contexte et non pas pour l'étude de la fonction en elle-même.

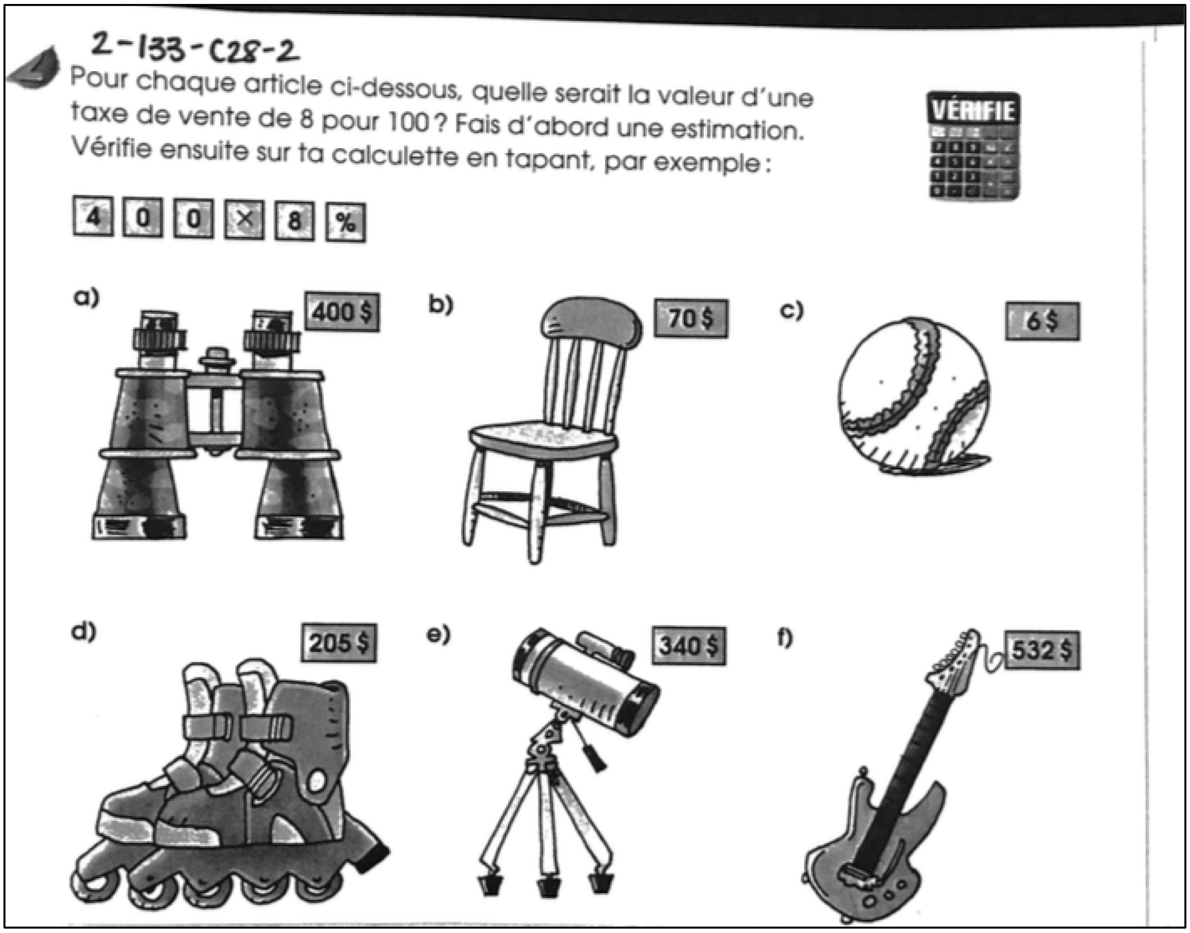
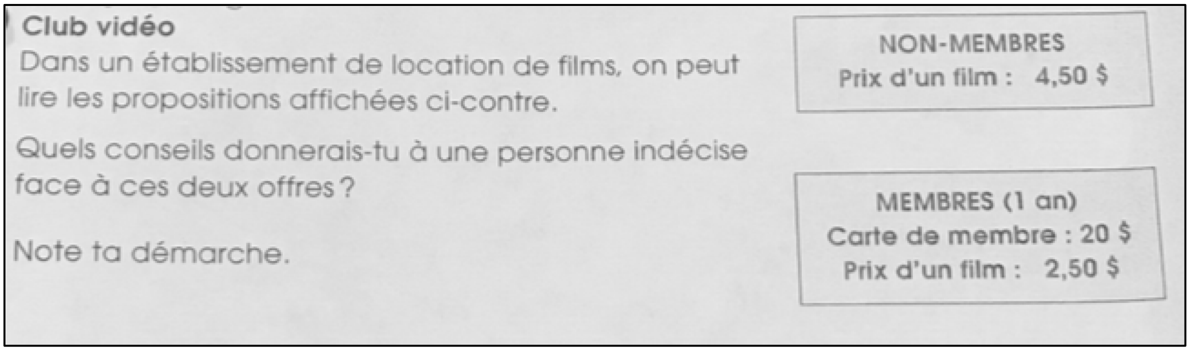


Figure 14 – Situation d'apprentissage 2-133-C28-2

Dans le genre de tâches *Déterminer*, les autres types de tâches ne sont pas du tout exploités par le manuel scolaire. Il n'y a en effet aucune tâche qui réfère aux caractéristiques d'une relation fonctionnelle particulière, à la fonction réciproque ou encore à la détermination de la relation fonctionnelle de manière explicite.

Le genre de tâches *Opérer* est quelque peu utilisé par le manuel scolaire alors que trois tâches s'y rapportent par l'addition de fonctions et l'utilisation de système d'équations. L'une des tâches mobilisant l'utilisation d'un système d'équation se retrouve dans la situation d'apprentissage 1-186-D21-3 de la figure 15. Dans celle-ci, une tâche consiste en effet à opérer sur le système d'équations représentant les options d'abonnement à un club vidéo afin de déterminer lequel est le plus avantageux.


Club vidéo
Dans un établissement de location de films, on peut lire les propositions affichées ci-contre.
Quels conseils donnerais-tu à une personne indécise face à ces deux offres ?
Note ta démarche.

NON-MEMBRES
Prix d'un film : 4,50 $

MEMBRES (1 an)
Carte de membre : 20 $
Prix d'un film : 2,50 $

Figure 15 – Situation d'apprentissage 1-186-D21-3

Deux genres de tâches sont absents du manuel scolaire soient : *Décrire* et *Représenter.* Encore une fois, l'aspect de covariation et de correspondance d'une fonction n'est pas pris en considération dans ce type d'activité fonctionnelle. Contrairement aux autres activités fonctionnelles, la représentation de la fonction dans divers registres n'est pas utilisée concrètement dans les tâches. Nous verrons plus loin, dans la section 2.3, si certains registres ont toutefois été utilisés pour observer la relation fonctionnelle à étudier.

2.2 Les techniques et le discours technologico-théorique

La troisième phase d'analyse de nos situations d'apprentissage relève de l'analyse des techniques proposées par les auteurs afin de distinguer les situations à potentiel fonctionnel non actualisé des situations fonctionnelles. Pour nos 64 situations d'apprentissage à l'étude, 29 n'étaient accompagnées d'aucune technique suggérée ni dans le manuel scolaire directement ni dans le guide de l'enseignant. Elles n'ont donc pas été étudiées plus en profondeur. Sur les 35 situations restantes, 17 sont accompagnées de techniques non-fonctionnelles alors que 18 seulement présentent des techniques fonctionnelles. Voici une répartition de ces situations d'apprentissage en fonction de l'activité fonctionnelle à laquelle elles se rattachent.

Tableau 20

Répartition des situations d'apprentissage présentant des techniques

Activité fonctionnelle	**Situation d'apprentissage à potentiel fonctionnel**			**Total**
	Sans technique suggérée	Avec technique non-fonctionnelle	Avec technique fonctionnelle	
Modélisation fonctionnelle	18	3	4	25 (39,1%)
Généralisation fonctionnelle	5	5	12	22 (34,4%)
Étude d'une relation fonctionnelle	6	9	2	17 (26,5%)
Total	29 (45,3%)	17 (26,6%)	18 (28,1%)	64 (100%)

À l'aide du tableau 20, nous pouvons voir que la majorité (18/25 donc 72%) des situations d'apprentissage relatives à la modélisation fonctionnelle ne sont pas accompagnées de technique suggérée. De plus, en ce qui concerne les activités liées à l'étude d'une relation fonctionnelle, 9 sur 17 (52,9%) sont accompagnées de techniques non-fonctionnelles, ce qui confirme notre hypothèse selon laquelle ces situations d'apprentissage ont pour objectif principal de développer des compétences de calcul efficace.

Le manuel scolaire ne suggère aucune technique pour 45,3% (29/64) des situations d'apprentissage à potentiel fonctionnel. De plus, il suggère des techniques non-fonctionnelles pour 26,6% (17/64) des situations et des techniques fonctionnelles pour 28,1% des situations d'apprentissage. Le tableau 20 montre en outre que 66,7% (les 2/3) des techniques fonctionnelles suggérées, ce qui est considérable. Il s'agit donc de l'activité fonctionnelle la plus exploitée par son aspect fonctionnel par les auteurs du manuel scolaire.

2.2.1 Les techniques fonctionnelles suggérées par le manuel relatives à la modélisation fonctionnelle

Reprenons maintenant nos tableaux synthèses des genres de tâches et des types de tâches afin de vérifier à quel endroit se concentrent les situations d'apprentissage fonctionnelles. Le tableau 21, construit à partir de l'annexe A, présente les situations d'apprentissage fonctionnelles de la modélisation fonctionnelle. Pour créer ce tableau, nous n'avons conserver que les situations d'apprentissage dont les tâches sont accompagnées de techniques fonctionnelles suggérées par les auteurs du manuel.

Tableau 21

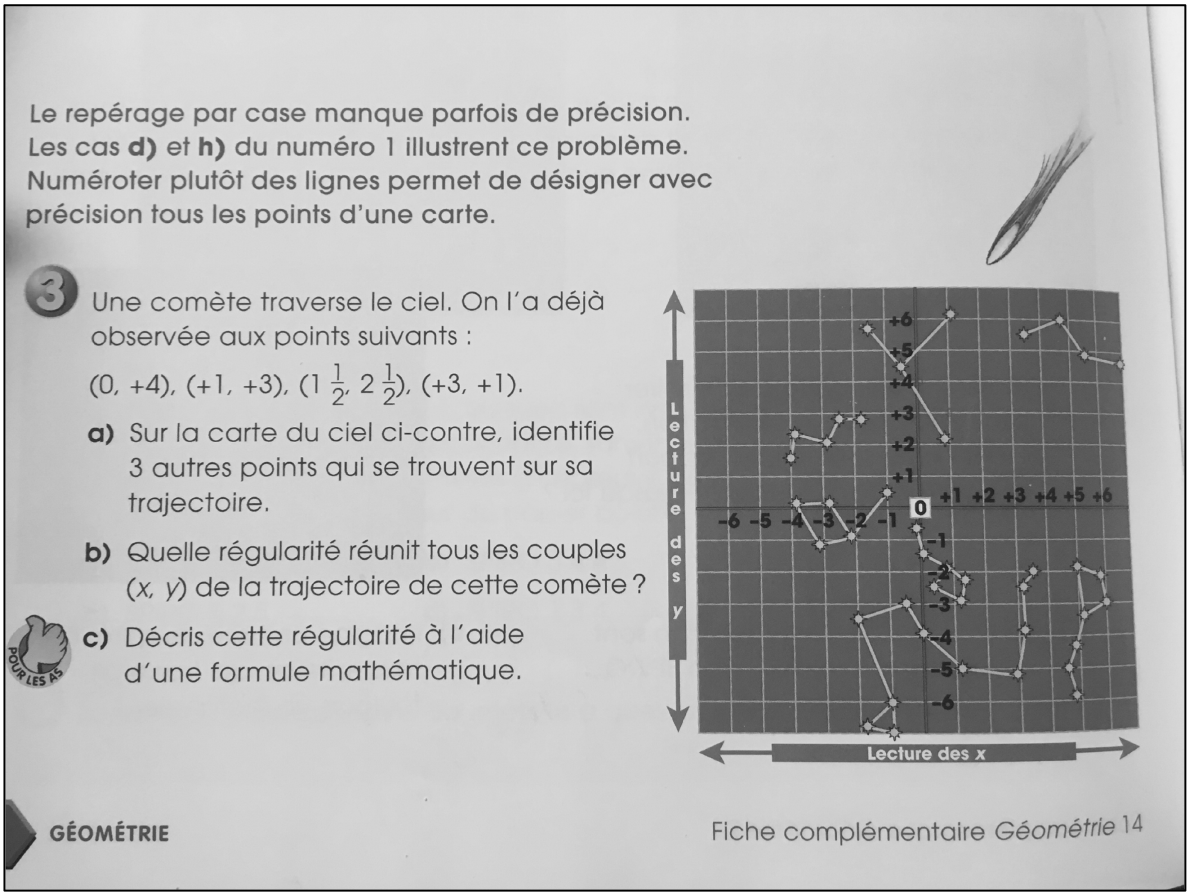
Inventaire des tâches des S.A. de la modélisation fonctionnelle pour lesquelles des techniques fonctionnelles sont suggérées par le manuel

Modélisation fonctionnelle																		
Genre de tâche	Identifier				Générer		Org.	Déterminer					Représenter				Prédire	
Type de tâches	$T_{I\text{-}V^*}$: Id. variables	$T_{I\text{-}D}$: Id. lien dép.	$T_{I\text{-}T}$: Id. tendance	$T_{I\text{-}S}$: Id. sens variation	$T_{G\text{-}D}$: Gén. descrip.	$T_{G\text{-}E}$: Gén. expérence	$T_{O\text{-}T}$: Org. tabulaire	$T_{D\text{-}COR}$: Dét. corresp.	$T_{D\text{-}COV}$: Dét covar.	$T_{D\text{-}M}$: Dét. mod. fonc	$T_{D\text{-}M}$: Dét. val. manq.	$T_{D\text{-}L}$: Dét. limites	$T_{R\text{-}G}$: Rep. graphique	$T_{R\text{-}T}$: Rep. tabulaire	$T_{R\text{-}C}$: Rep. courbe	$T_{R\text{-}M}$: Rep. divers	$T_{P\text{-}V}$: Pré. comp. var	$T_{P\text{-}M}$: Pré. comp. mod
Code SA																		
1-142-B19-3			1		1											1		
1-143-B20-1					4										2	2		
1-167-A2-3												1						
1-172-B7-3												1						
Total	0	0	1	0	5	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	3	0	0

Ce nouveau tableau nous montre d'abord que seulement cinq types de tâches sont concernées par des techniques fonctionnelles suggérées par les auteurs du manuel scolaire. Afin d'être exhaustifs, nous présentons ci-dessous ces techniques fonctionnelles suggérées par le manuel pour les situations d'apprentissage 1-142-B19-3, 1-143-B20-1 et 1-172-B7-3.

Ceci nous permettra d'exposer en quoi leurs techniques sont fonctionnelles et de recouvrir du même coup tous les types de tâches qui sont affectés d'une technique fonctionnelle.

D'abord, regardons la situation 1-142-B19-3 présentée à la figure 16.


Le repérage par case manque parfois de précision. Les cas **d)** et **h)** du numéro 1 illustrent ce problème. Numéroter plutôt des lignes permet de désigner avec précision tous les points d'une carte.

3 Une comète traverse le ciel. On l'a déjà observée aux points suivants :
(0, +4), (+1, +3), ($1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$), (+3, +1).

a) Sur la carte du ciel ci-contre, identifie 3 autres points qui se trouvent sur sa trajectoire.

b) Quelle régularité réunit tous les couples (*x*, *y*) de la trajectoire de cette comète ?

c) Décris cette régularité à l'aide d'une formule mathématique.

GÉOMÉTRIE

Fiche complémentaire *Géométrie* 14

Figure 16 – Situation d'apprentissage 1-142-B19-3

Trois tâches fonctionnelles sont associées à cette situation d'apprentissage :

t_a : Générer trois autres points de la trajectoire de la comète ;

t_b : Identifier la régularité qui unit tous les couples de la trajectoire de la comète ;

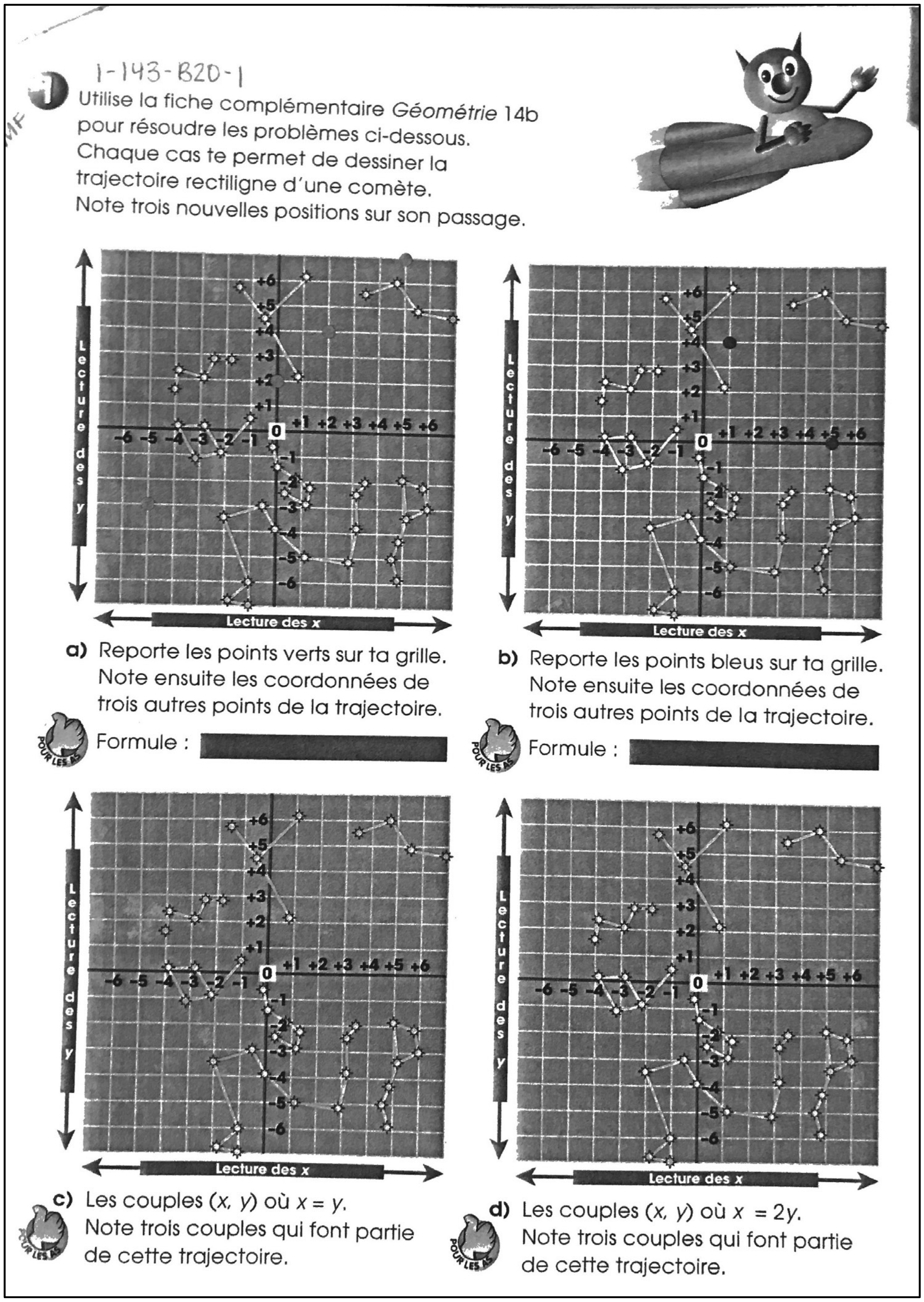
t_c : Représenter la régularité à l'aide d'une formule mathématique.

Dans le guide de l'enseignant, une activité d'introduction est suggérée avant de faire les situations d'apprentissage 1-142-B19-3 et 1-143-B20-1. Ces dernières sont à faire par la suite en travail individuel pour le réinvestissement des connaissances. Nous supposons donc que l'intention des auteurs est que la technique présentée dans l'activité d'introduction soit reproduite dans le travail individuel. La technique présentée dans le guide de l'enseignant est la suivante :

1. Dessiner les points énumérés sur la grille cartésienne ;
2. Discuter avec les élèves de la trajectoire. Faire ressortir les éléments suivants :
    a. La façon régulière dont les points sont répartis ;
    b. Le déplacement rectiligne de la comète ;
    c. L'usage de la règle pour trouver des points ;
    d. La régularité dans les couples de nombres.
3. Décrire à l'aide d'une phrase mathématique la régularité entre les couples ;
4. Utiliser la lettre x pour désigner le numéro de la colonne et y pour désigner la rangée.

Selon nous, la technique suggérée repose sur un discours technologico-théorique relatif aux fonctions puisqu'elle met explicitement en œuvre la représentation des coordonnées de la fonction affine dans le registre graphique et qu'elle insiste sur la reconnaissance du modèle fonctionnel (déplacement rectiligne). De plus, la régularité recherchée se base sur la relation entre les couples de valeurs. Nous en concluons que cette technique est fonctionnelle.

Pour la situation d'apprentissage 1-143-B20-1 de la figure 17, la technique suggérée est la même pour la résolution des tâches présentées. La seule tâche supplémentaire consiste à représenter concrètement d'autres points de la trajectoire dans le repère cartésien. La première étape de la technique présentée est donc associée à cette tâche. Bien que des explications ne soient pas données sur la manière de dessiner les points sur la grille cartésienne, nous tenons pour acquis que les élèves sont déjà familiers avec les techniques qui permettent de bien représenter les points dans le plan.


1-143-B20-1

1 Utilise la fiche complémentaire *Géométrie* 14b pour résoudre les problèmes ci-dessous. Chaque cas te permet de dessiner la trajectoire rectiligne d'une comète. Note trois nouvelles positions sur son passage.

a) Reporte les points verts sur ta grille. Note ensuite les coordonnées de trois autres points de la trajectoire.

Formule :

b) Reporte les points bleus sur ta grille. Note ensuite les coordonnées de trois autres points de la trajectoire.

Formule :

c) Les couples (*x*, *y*) où *x* = *y*. Note trois couples qui font partie de cette trajectoire.

d) Les couples (*x*, *y*) où *x* = 2*y*. Note trois couples qui font partie de cette trajectoire.

Figure 17 – Situation d'apprentissage 1-143-B20-1

La situation 1-172-B7-3 (figure 18) présente une situation de modélisation fonctionnelle particulièrement intéressante puisqu'il s'agit en réalité d'un piège pour les élèves.

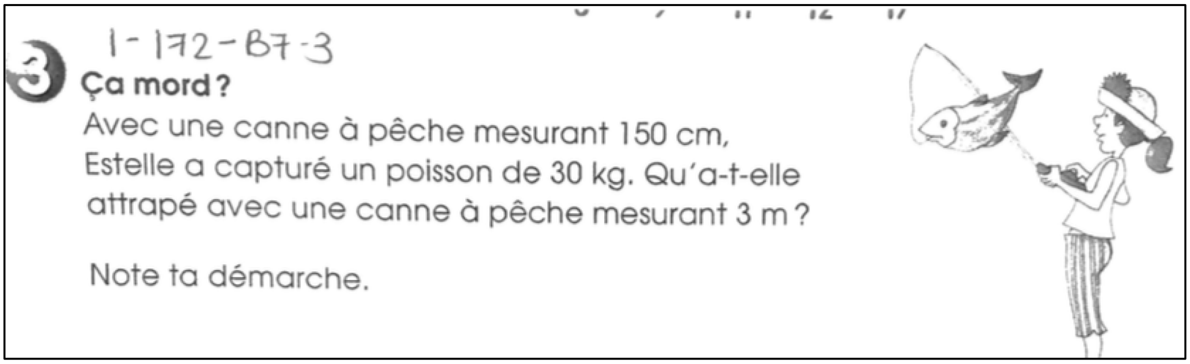


Figure 18 - Situation d'apprentissage 1-172-B7-3

L'objectif de cette situation d'apprentissage est de rappeler aux élèves que la résolution de problèmes ne doit pas nécessairement toujours mener à une réponse. Rapidement, s'ils ne font pas attention au contexte, les élèves devraient trouver que le poisson a doublé de grosseur. Pour les faire réaliser leur erreur, les auteurs suggèrent comme technique de donner d'autres longueurs de canne à pêche : comme 15 cm ou encore 15 mm. Le but est ainsi de discuter des limites d'un modèle fonctionnel basé sur un contexte où les variables n'ont pas de lien de dépendance. La technique est fonctionnelle ici puisqu'elle prend appui sur des fondements en lien avec la modélisation et des limites des modèles fonctionnels.

En bref, les techniques suggérées pour la modélisation fonctionnelle recouvrent seulement 5 types de tâches distincts. Nous discuterons plus en profondeur de la signification de ces constats dans le chapitre suivant.

2.2.2 Les techniques fonctionnelles relatives à la généralisation fonctionnelle

Examinons maintenant les techniques fonctionnelles relatives aux activités de généralisation fonctionnelle à l'aide du tableau 22 construit à partir de l'annexe B.

Tableau 22

Inventaire des tâches des S.A. de la généralisation fonctionnelle pour lesquelles des techniques fonctionnelles sont suggérées par le manuel

Généralisation fonctionnelle												
Genre de tâche	Identifier			Formuler			Rechercher			Justifier		
Type de tâches	$T_{I\text{-}I^*}$: Id. instanc.	$T_{I\text{-}RF}$: Id. rel. Fonc.	$T_{I\text{-}D}$: Id. régu. dessins	$T_{F\text{-}M}$: Form. mots	$T_{F\text{-}S}$: Form. Symb.	$T_{F\text{-}L}$: Form. Lang.	$T_{R\text{-}R}$: Rech. proche	$T_{R\text{-}É}$: Rech. lointain	$T_{R\text{-}G}$: Rech. général	$T_{J\text{-}E}$: Just. exemple	$T_{J\text{-}A}$: Just. argum.	$T_{J\text{-}P}$: Just. preuve
Code SA												
1-128-A5-3	1											
1-128-A5-4				1								
1-170-B5-1						1	2	1				
1-170-B5-2	1						4	1		1		
1-171-B6-3							1	1				
1-171-B6-4						4	18	4				
1-174-C9-2						2	5	1				
1-176-C11-3							1					
2-128-B23-2				1			1					
2-184-B5-1	4			1			12	4				
2-185-B6-3			1			1		1				
2-189-B10-2		1					1	1				
Total	6	1	1	3	0	8	45	14	0	1	0	0

Rappelons qu'initialement, ce sont 113 tâches associées à la généralisation fonctionnelle qui ont été recensées. Or, en additionnant le total de chaque colonne du tableau 22, nous pouvons constater que 79 de ces tâches sont associées à des techniques fonctionnelles. Ceci représente 69,9% de toutes les tâches fonctionnelles, ce qui est un résultat considérable. Afin d'exemplifier une technique fonctionnelle relative à chaque type de tâches de ce tableau, nous proposons d'utiliser d'abord les situations d'apprentissages 1-128-A5-4, 1-170-B5-1, 1-170-B5-2. Ensuite, nous exposerons rapidement la technique présentée pour $T_{I\text{-}RF}$ *: Identifier la relation fonctionnelle à partir de quelques instanciations* *(couples)* et $T_{I\text{-}T}$ *: Identifier une régularité à partir de dessins* pour les situations d’apprentissage 2-189-B10-2 et 2-185-B6-3 respectivement.

Premièrement, pour bien analyser la situation 1-128-A5-4, il faut présenter du même coup la situation précédente : 1-128-A5-3. Ces deux situations sont exposées à la figure 19.

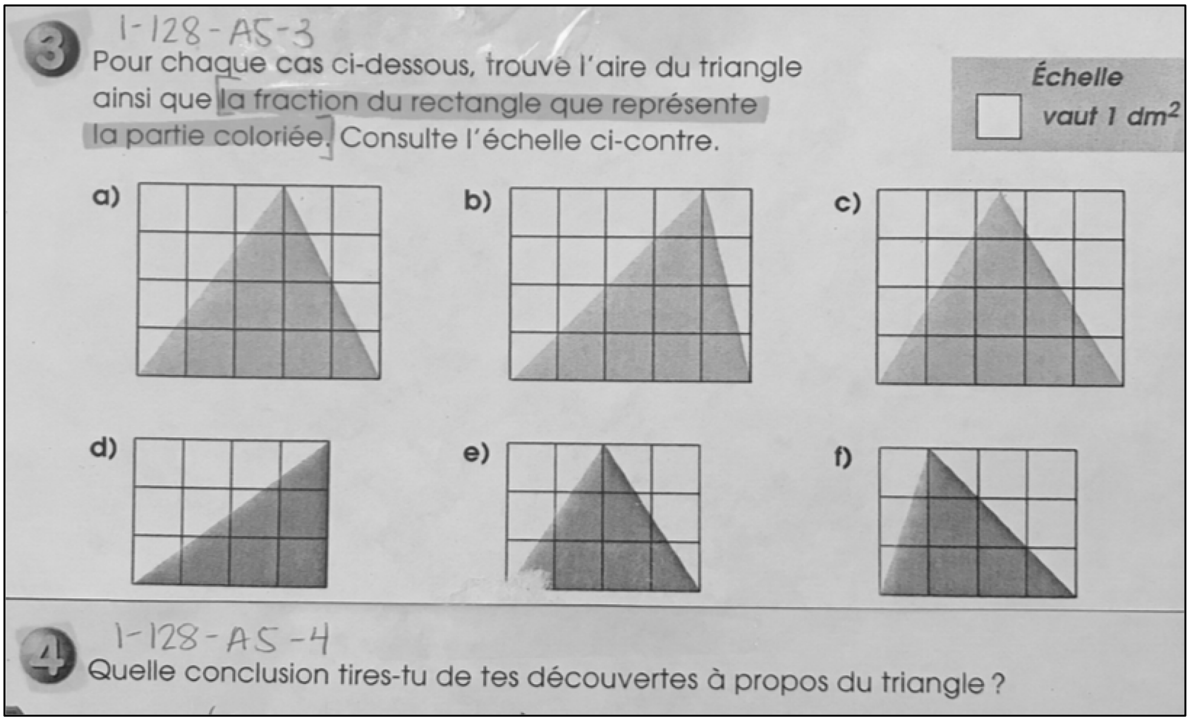
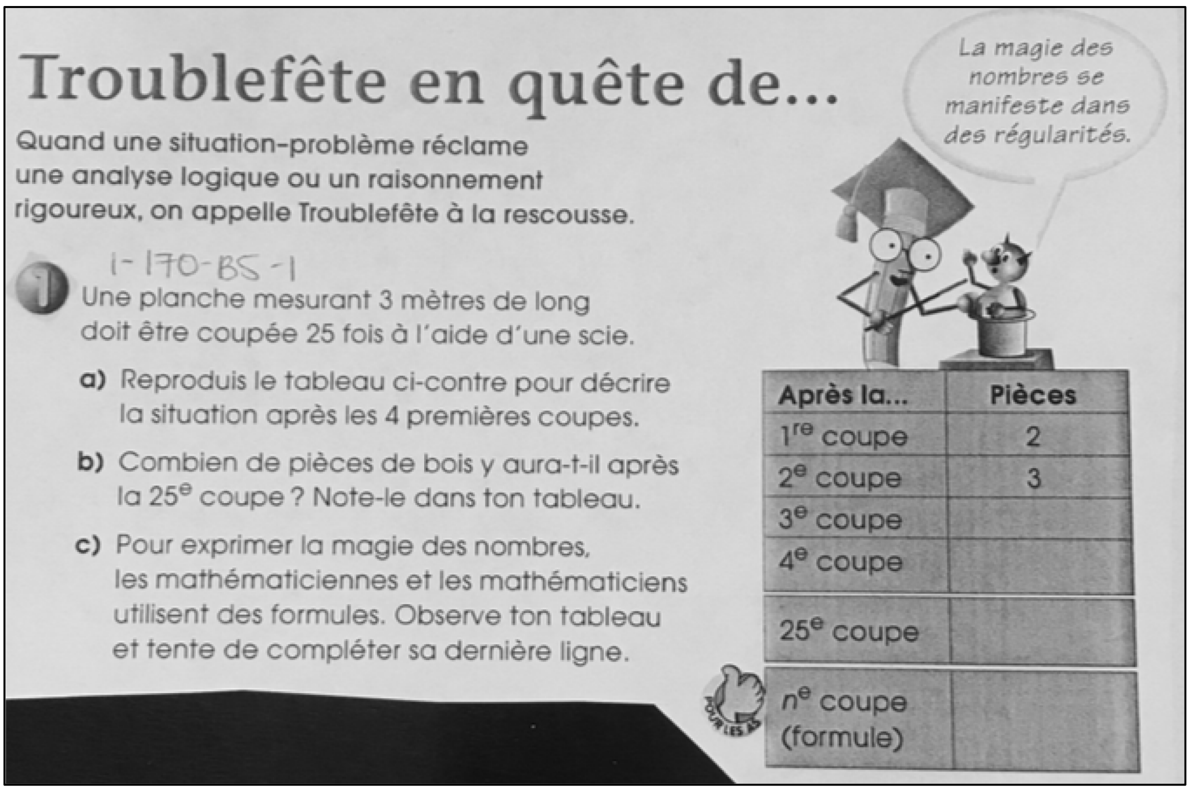


Figure 19 – Situations d’apprentissage 1-128-A5-3 et 1-128-A5-4

Pour répondre à la tâche de la situation 1-128-A5-4 qui est t_a *: Formule ta découverte à propos de l’aire du triangle*, il faut préalablement avoir établi une régularité à partir des triangles représentés dans le numéro précédent. La consigne du manuel scolaire stipulant de rechercher la fraction du rectangle que représente la partie coloriée nous pousse à croire que l’intention des auteurs était d’amener les élèves à découvrir la relation fonctionnelle existant entre l’aire d’un triangle et l’aire du rectangle possédant la même base et la même hauteur. De plus, dans le guide de l’enseignant, une consigne est formulée à ce sujet : « l’enseignant doit attirer l’attention des élèves sur la caractéristique suivante : *l’aire d’un triangle vaut toujours la moitié de l’aire d’un rectangle ayant la même base et* *la même hauteur* » (Lyons et Lyons, 2005*b,* p. 6). Bien que cette consigne soit la seule nous indiquant la présence d'une technique pour la résolution de cette tâche, nous en concluons que la technique est fonctionnelle puisqu'elle met explicitement en valeur la relation fonctionnelle entre l'aire des deux formes.

Examinons maintenant une situation d'apprentissage plus complexe 1-170-B5-1 présentée à la figure 20.



Troublefête en quête de...

Quand une situation-problème réclame une analyse logique ou un raisonnement rigoureux, on appelle Troublefête à la rescousse.

La magie des nombres se manifeste dans des régularités.

1 1-170-B5-1

Une planche mesurant 3 mètres de long doit être coupée 25 fois à l'aide d'une scie.

a) Reproduis le tableau ci-contre pour décrire la situation après les 4 premières coupes.

b) Combien de pièces de bois y aura-t-il après la 25e coupe ? Note-le dans ton tableau.

c) Pour exprimer la magie des nombres, les mathématiciennes et les mathématiciens utilisent des formules. Observe ton tableau et tente de compléter sa dernière ligne.

Après la...	Pièces
1re coupe	2
2e coupe	3
3e coupe	
4e coupe	
25e coupe	
*n*e coupe (formule)	

Figure 20 – Situation d'apprentissage 1-170-B5-1

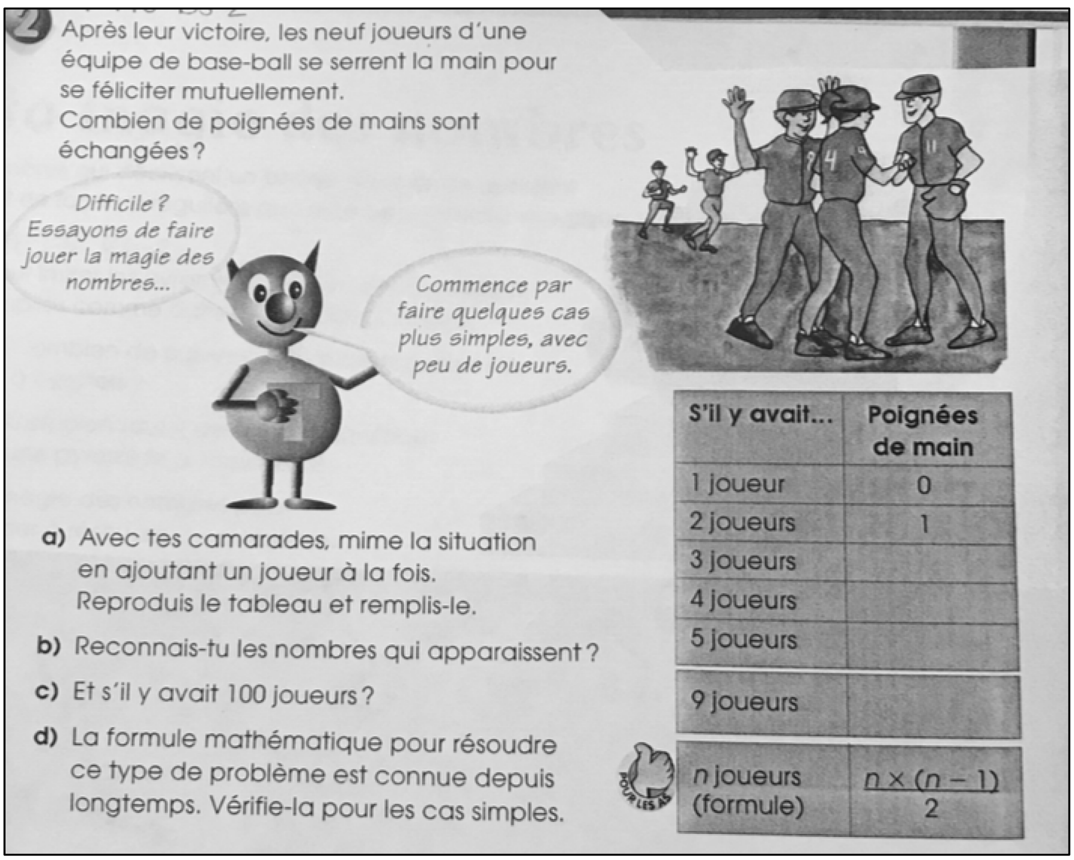
Pour la réalisation des différentes tâches de cette situation d'apprentissage, la technique fournie par le guide de l'enseignant s'appuie sur les indications suivantes :

1. Invitez les élèves à compléter le tableau de données pour les 3e et 4e coupes ;
2. Demandez aux élèves de chercher la régularité ;

3. Aidez les élèves à rédiger une formule qui permet de prédire tous les cas possibles. Pour le choix des variables, nous suggérons d'utiliser la première lettre des mots ;
4. Invitez les élèves à compléter la donnée pour la 25e coupe.

Cette technique est fonctionnelle et elle suit la technique générique que nous avons proposée dans notre analyse *a priori*. L'élève pressent d'abord une régularité puis il tente de la formuler avec l'aide de l'enseignant. La technique offre même un conseil pour le choix des variables à utiliser.

Finalement, nous avons choisi de présenter la situation d'apprentissage 1-170-B5-2 pour montrer la technique suggérée pour la résolution des genres de tâches *Rechercher* et *Justifier*. Encore une fois, les techniques suggérées ne sont pas très explicites, mais elles montrent en partie les intentions des auteurs.



2 Après leur victoire, les neuf joueurs d'une équipe de base-ball se serrent la main pour se féliciter mutuellement.
Combien de poignées de mains sont échangées ?

a) Avec tes camarades, mime la situation en ajoutant un joueur à la fois. Reproduis le tableau et remplis-le.

b) Reconnais-tu les nombres qui apparaissent ?

c) Et s'il y avait 100 joueurs ?

d) La formule mathématique pour résoudre ce type de problème est connue depuis longtemps. Vérifie-la pour les cas simples.

S'il y avait...	Poignées de main
1 joueur	0
2 joueurs	1
3 joueurs	
4 joueurs	
5 joueurs	
9 joueurs	
n joueurs (formule)	$\frac{n \times (n-1)}{2}$

Figure 21 – Situation d'apprentissage 1-170-B5-2

Les sept tâches associées à la situation présentée à la figure 21 sont les suivantes :

t_a : Rechercher le nombre de poignées de mains qu'échangent 3 joueurs ;
t_b : Rechercher le nombre de poignées de mains qu'échangent 4 joueurs ;
t_c : Rechercher le nombre de poignées de mains qu'échangent 5 joueurs ;
t_d : Rechercher le nombre de poignées de mains qu'échangent 9 joueurs ;
t_e : Identifie la suite de nombre (triangulaire) ;
t_f : Rechercher le nombre de poignées de mains qu'échangent 100 joueurs ;
t_g : Vérifie la relation fonctionnelle donnée à partir des cas simples trouvés.

Pour leur résolution, le guide de l'enseignant donne les indications générales suivantes :

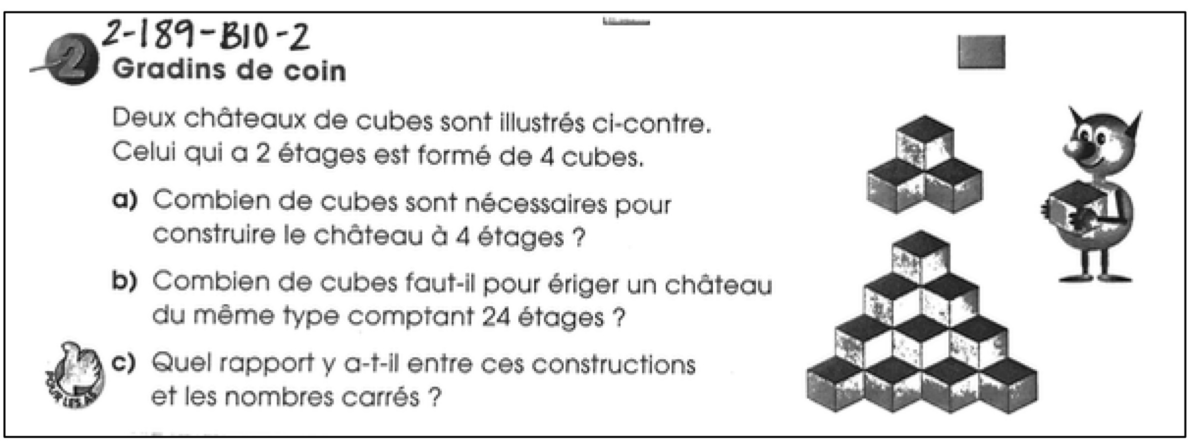
1. Invitez les élèves à compléter le tableau de données pour les poignées de main en mimant la situation en ajoutant 1 joueur à la fois ;
2. Demandez aux élèves de chercher la régularité (ils identifieront la suite des nombres triangulaires) ;
3. Vérifier la formule qui est donnée pour les cas déjà résolus ;
4. Trouver le nombre de poignées de mains pour 40 et 100 joueurs.

Un point intéressant de cette technique est l'accessibilité associée à la reproduction de la situation dans la classe. Le fait d'insister sur le fait de n'ajouter qu'un joueur à la fois permet également aux élèves de réfléchir plus explicitement au lien de covariation entre les variables (que ce passe-t-il pour le nombre de poignées de mains alors que le nombre de joueurs augmente de 1). Comme les élèves ont déjà étudié la suite des nombres triangulaires, la recherche de la régularité passe par l'identification d'une suite déjà connue. Ils ne connaissent toutefois pas la formule qui leur est fournie dans la situation d'apprentissage. Ils peuvent donc la vérifier avec les cas déjà établis et ensuite rechercher un cas éloigné à partir de cette formule.

Cette technique est fonctionnelle et elle suit encore une fois la technique générique que nous avons proposée dans notre analyse *a priori*. L'élève pressent d'abord une régularité, celle de la suite des nombres triangulaires, qu'il a déjà étudiée. L'ajout d'un joueur à la fois aide au dénombrement et à l'établissement de la suite correcte. Ceci facilite également la reconnaissance d'une suite déjà étudiée. Le fait de vérifier la formule avec des exemples empiriques constitue, à notre avis, un niveau de justification satisfaisant pour des élèves de cet âge.

Sans présenter en détail les techniques de résolution pour chacune des tâches des situations d'apprentissage 2-189-B10-2 et 2-185-B6-3 et 2-184-B5-1, nous tenions tout de même à présenter les techniques fonctionnelles pour les types de tâches que nos trois exemples précédents ne permettent pas de couvrir.

Premièrement, pour le type de tâches $T_{I\text{-}RF}$: *Identifier la relation fonctionnelle à partir de quelques instanciations (couples)* la tâche de la situation d'apprentissage 2-189-B10-2 consiste à trouver le rapport existant entre la construction d'une pyramide de cubes d'un certain nombre d'étages et le nombre de cubes nécessaire à sa construction (figure 22).


2-189-B10-2

2 Gradins de coin

Deux châteaux de cubes sont illustrés ci-contre.
Celui qui a 2 étages est formé de 4 cubes.

a) Combien de cubes sont nécessaires pour construire le château à 4 étages ?

b) Combien de cubes faut-il pour ériger un château du même type comptant 24 étages ?

c) Quel rapport y a-t-il entre ces constructions et les nombres carrés ?

Figure 22 – Situation d'apprentissage 2-189-B10-2

Pour faire cette tâche, les élèves ont d'abord accès à des cubes afin de détecter une régularité par la manipulation. À la fin de l'activité, ils doivent identifier la relation fonctionnelle. Pour ce faire, le guide de l'enseignant suggère que les élèves observent la régularité des écarts entre les différentes valeurs consécutives de la suite. Pris deux par deux, les écarts forment la suite des carrés des premiers nombres pairs. La technique suggérée consiste à construire l'arbre des différences et elle est exposée à la figure 23. Comme le lien entre le nombre d'étages et le nombre de cubes est constamment répété et que la technique insiste sur celui-ci, nous considérons que la technique proposée est fonctionnelle.

Avec une quarantaine de cubes, les élèves ne peuvent construire un château de plus de cinq étages ; les autres doivent faire l'objet de déductions, grâce à la régularité qui se dessine.

Nombre d'étages	**Nombre de cubes**	**Écart**
0	0	—
1	1	+1
2	4	+3
3	10	+6
4	20	+10
5	35	+15
6	56	+21
7	84	+28
24	2 600	—

Dans l'arbre des différences ci-dessous, on voit apparaître les nombres triangulaires (deuxième ligne).

0 1 4 10 20 35 56 84…

1 3 6 10 15 21 28…

2 3 4 5 6 7…

1 1 1 1 1…

Cet arbre est de degré quatre. On constate que la section qui se trouve à l'extrême gauche (avec des traits pointillés) peut être ajoutée à cet arbre sans briser l'harmonie des suites. On conclut que zéro appartient à la suite de départ.

c) En prenant les étages des constructions deux à la fois, à partir du sommet, on obtient toujours un nombre carré :

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$6 + 10 = 16 = 4^2$$
$$15 + 21 = 36 = 6^2$$
etc.

Ces valeurs sont les carrés des nombres pairs. Pour trouver le nombre de cubes du château de 24 étages, on peut donc aussi additionner les 12 premiers nombres qui sont des carrés de nombres pairs (plus grands que 0) : $2\,600 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \ldots + 24^2$.

Figure 23 – Technique de résolution de la situation 2-189-B102

Deuxièmement, pour le type de tâches $T_{I\text{-}T}$: *Identifier une régularité à partir de dessins* pour la situation d'apprentissage 2-185-B6-3 (figure 24), la technique proposée par les auteurs consiste non seulement à observer les dessins fournis dans le manuel scolaire, mais également de les reproduire. Ce faisant, les élèves ont plus de facilité à identifier la régularité qui se construit à l'ajout de chaque rangée de points. Le lien doit être établi entre le numéro de la figure et le nombre de points. La technique est donc fonctionnelle.

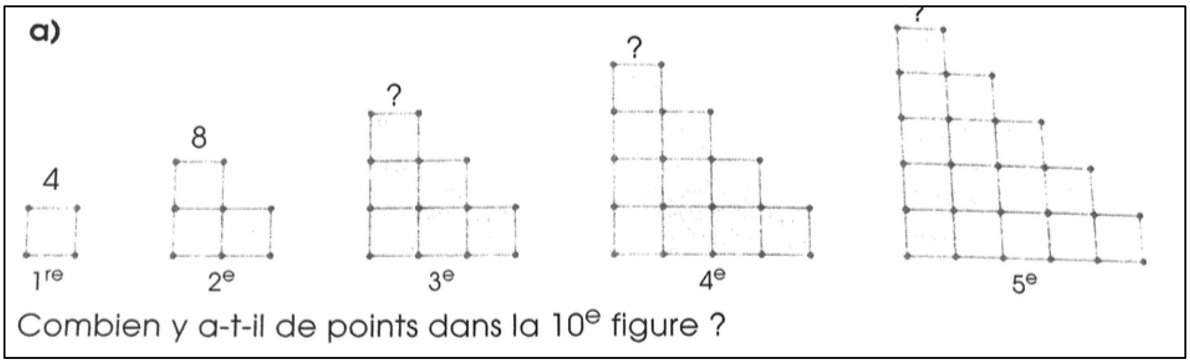


Figure 24 – Situation d'apprentissage 2-185-B6-3

Les techniques suggérées par les auteurs pour les situations d'apprentissage relatives à la généralisation fonctionnelle rejoignent régulièrement les techniques génériques exemplifiées dans notre analyse *a priori*. Elles s'inspirent ainsi des étapes du processus de généralisation et permettent de mettre en valeur la relation fonctionnelle recherchée entre les deux quantités variables. Les auteurs ajoutent également que de « [t]rouver une formule mathématique est un enrichissement du programme de formation, mais la démarche qui conduit à la rédaction présente un grand intérêt pour la perception et pour la compréhension des élèves » (Méli-mélo Bloc B p. 17). La deuxième étape du processus de généralisation est donc clairement mise en valeur dans les situations d'apprentissage exposées. Il est maintenant temps de dresser un portrait similaire pour les activités d'étude d'une relation fonctionnelle.

2.2.3 Les techniques fonctionnelles relatives à l'étude d'une relation fonctionnelle

Voici un tableau, construit à partir de l'annexe C, présentant situations d'apprentissage accompagnées de techniques fonctionnelles relatives aux activités d'étude d'une relation fonctionnelle.

Tableau 23
Inventaire des tâches des S.A. d'étude d'une relation fonctionnelle pour lesquelles des techniques fonctionnelles sont suggérées par le manuel

Étude d'une relation fonctionnelle															
Genre de tâche	Déterminer				Décrire		Représenter			Opérer					
Type de tâches	$T_{DÉT-C*}$: Dét. caract.	$T_{DÉT-R}$: Dét. récipro.	$T_{DÉT-RF}$: Dét. rel. fon.	$T_{DÉT-V}$: Dét. v. manq.	$T_{DÉC-COR}$: Déc. corr.	$T_{DÉC-COV}$: Déc. cov.	T_{R-G} : Rep. graphique	T_{R-T} : Rep. tabulaire	T_{R-A} : Rep. an. ou alg.	T_{O-A} : Opérer add.	T_{0-S} : Opérer sous.	T_{O-P} : Opérer prod.	T_{O-Q} : Opérer quo.	T_{O-C} : Opérer comp.	$T_{O-SÉ}$: Op. sys. équ.
Code SA															
1-138-B15-1				9											
1-186-D21-3															1
Total	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Seulement deux situations d'apprentissage de cette catégorie, sur un total de 17, présentent des techniques fonctionnelles suggérées par les auteurs. Plusieurs autres situations (9/17) sont accompagnées de techniques suggérées, mais elles réfèrent à des habiletés de calcul efficace et au développement de compétences arithmétiques. Nous présentons donc les deux techniques suggérées par les auteurs.

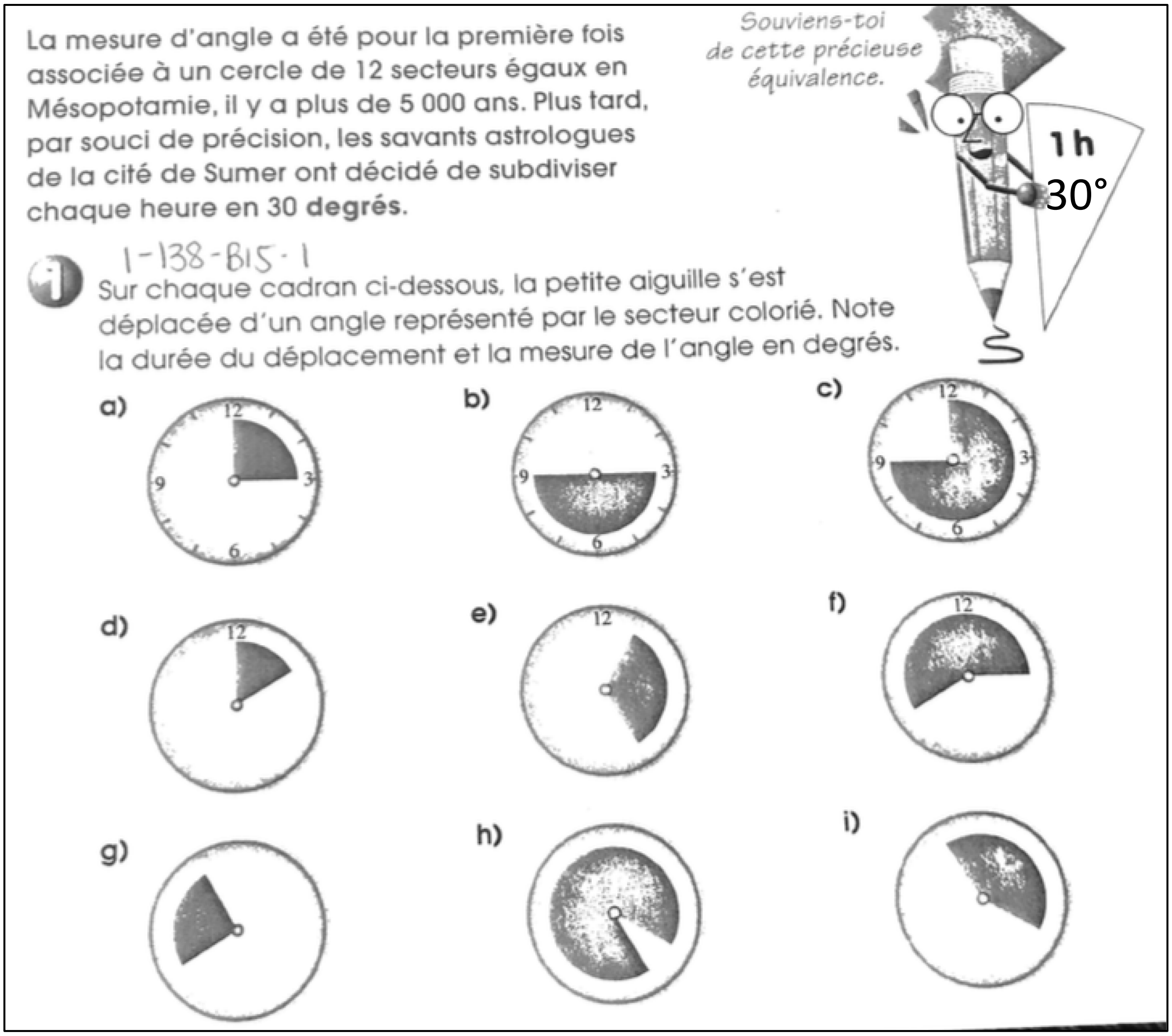
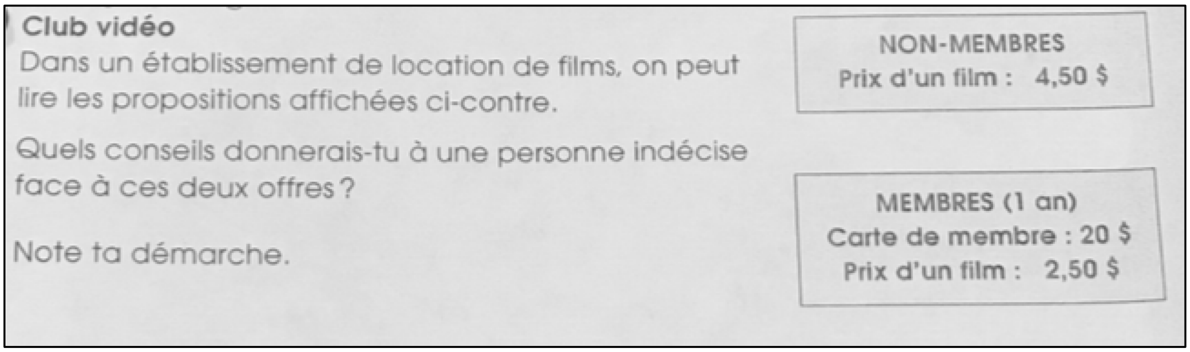


Figure 25 – Situation d'apprentissage 1-138-B15-1

D'abord, la situation d'apprentissage 1-138-B15-1 de la figure 25, contient 9 tâches similaires à t_a : *Déterminer la mesure de l'angle en degré pour une durée de 3h* avec des durées différentes. Ces tâches sont toutes relatives au type de tâches *Déterminer une valeur manquante*. Nous n'avons pas d'autres indices pour la résolution de cette tâche outre le dessin dans le coin supérieur droit qui nous indique la relation fonctionnelle entre la mesure de l'angle en degré et une heure. Dans le guide de l'enseignant, l'indication fournie est de mettre en évidence cette relation et de laisser ensuite les élèves réaliser les tâches de manière individuelle. Comme la relation est posée et explicitée, nous dirons que la technique est fonctionnelle.

La situation d'apprentissage 1-186-D21-3 (figure 26) est particulièrement intéressante puisqu'elle met en jeu deux relations fonctionnelles à comparer.



Club vidéo

Dans un établissement de location de films, on peut lire les propositions affichées ci-contre.

Quels conseils donnerais-tu à une personne indécise face à ces deux offres ?

Note ta démarche.

NON-MEMBRES
Prix d'un film : 4,50 $

MEMBRES (1 an)
Carte de membre : 20 $
Prix d'un film : 2,50 $

Figure 26 – Situation d'apprentissage 1-186-D21-3

En examinant de plus près la situation d'apprentissage présentée à la figure 26, nous pouvons constater qu'il s'agit de la résolution d'un système d'équations. Habituellement, des tâches de ce type apparaissent seulement en deuxième et en troisième secondaires dans le parcours québécois. Pour la résolution, les auteurs fournissent quelques indications pertinentes dans le guide de l'enseignant, sans toutefois présenter une démarche de résolution étape par étape.

Les auteurs mentionnent d'abord l'importance d'envisager plusieurs scénarios liés au nombre de films loués dans une année et d'utiliser une table de valeurs à trois colonnes pour consigner les prix et pour comparer les scénarios. Ils suggèrent ensuite d'amener les élèves à observer les régularités pour les deux colonnes associées au prix total. Ils proposent également d'utiliser les formules pour généraliser les régularités en utilisant comme variable le nombre de films loués. Pour 11 films, les prix sont exactement les mêmes pour les deux scénarios. Ce constat se fait à partir de la table de valeurs. Les interprétations peuvent ensuite être faites également en observant la table de valeurs correctement remplie. Comme la technique proposée s'appuie sur l'utilisation d'une table de valeurs et sur le discours technologico-théorique relatif à la résolution de systèmes d'équations, nous en concluons que la technique proposée est fonctionnelle.

2.3 Les caractéristiques de la pensée fonctionnelle dans les techniques fonctionnelles

La dernière étape de notre analyse nous mène à identifier quelles composantes de la pensée fonctionnelle sont mises à profit dans les techniques suggérées par les auteurs pour la résolution de tâches fonctionnelles. Voici donc un tableau synthèse qui regroupe nos différentes composantes et qui montre leur répartition à travers les situations d'apprentissage fonctionnelles.

Tableau 24

Compilation de nos différentes composantes de la pensée fonctionnelle

	Raisonnements fonctionnels				**Concepts fonctionnels**						**Comm.**
	Modéliser	Généraliser	Covariation	Correspondance	Variable	Dépendance	Exp. alg. comme RF	Rel. équiv.	Covariation	Correspondance	Articuler les divers registres
Code SA											
1-142-B19-3	x				x					x	x
1-143-B20-1	x				x					x	x
1-167-A2-3	x				x	x					
1-172-B7-3	x				x	x					
1-138-B15-1				x	x	x				x	
1-186-D21-3			x	x	x	x		x	x	x	x
1-128-A5-3		x			x	x		x			
1-128-A5-4		x			x	x		x			
1-170-B5-1		x			x	x				x	x
1-170-B5-2		x			x	x			x		x
1-171-B6-3		x			x	x			x		x
1-171-B6-4		x			x				x		x
1-174-C9-2		x			x	x				x	x
1-176-C11-3		x			x				x		
2-128-B23-2		x			x				x		x
2-184-B5-1		x			x	x				x	x
2-185-B6-3		x			x					x	x
2-189-B10-2		x			x	x			x		x
Total	4	12	1	2	18						

En un coup d'œil, nous pouvons faire différents constats. D'abord, tous nos raisonnements fonctionnels sont exploités à travers l'une ou l'autre de nos situations d'apprentissage. Bien évidemment, ce sont les activités de modélisation fonctionnelle qui exploitent la tendance à modéliser et celles de généralisation fonctionnelle qui mobilisent la tendance à généraliser. Dans nos activités d'étude d'une relation fonctionnelle, nos deux autres raisonnements fonctionnels sont exploités selon la nature de la tâche.

Ensuite, l'une des tendances relatives à l'un de nos concepts fonctionnels n'est pas mise à profit : la tendance à voir une expression algébrique comme une relation fonctionnelle. Or, comme l'algèbre n'est objet d'apprentissage qu'au secondaire, il est normal de voir que les expressions algébriques ne sont pas mobilisées dans ce manuel du primaire. Cette tendance serait probablement observée plus abondamment dans des niveaux scolaires supérieurs.

Le concept de variable est inévitablement exploité par toutes nos situations d'apprentissage puisque les techniques fonctionnelles mettent toujours en jeu deux quantités qui varient. Comme les fonctions permettent d'étudier les relations fonctionnelles entre des quantités variables, il n'est pas étonnant que cette tendance soit au cœur de chacune de nos activités fonctionnelles.

La tendance à percevoir la dépendance entre deux quantités covariantes est la deuxième tendance la plus observée dans nos techniques fonctionnelles. Or, comme René de Cotret (1988) le mentionne, c'est l'idée de dépendance qui se retrouve fondamentalement au cœur du concept de fonction. Nous ne sommes donc pas surpris que ce concept se retrouve régulièrement dans nos situations d'apprentissage fonctionnelles.

Finalement, il est pertinent d'observer que les registres de représentation sémiotiques sont bien mis à profit dans nos diverses situations d'apprentissage fonctionnelles. À travers les analyses précédentes, nous avons pu constater que tous les registres institutionnels et non-institutionnels mentionnés dans notre cadre de référence sont mis à profit dans nos activités fonctionnelles. Ceci montre une intention des auteurs de varier les registres et de favoriser l'apprentissage du passage d'un registre à un autre.

Les résultats en lien avec nos 3 étapes d'analyse étant maintenant présentés, il importe de vérifier comment tous ces éléments peuvent être mis en relation afin de répondre à nos diverses questions de recherche.

CINQUIEME CHAPITRE
DISCUSSION ET INTERPRETATION DES RESULTATS

Dans ce dernier chapitre de notre mémoire, nous discutons des implications de nos différents résultats d'analyse afin de répondre à nos questions de recherche. Rappelons d'abord que l'objectif principal de notre recherche était d'analyser le potentiel des manuels scolaires québécois pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle. Or, pour répondre à cet objectif, il fallait d'abord élaborer un modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle qui nous a été utile non seulement pour identifier les différentes composantes de celle-ci, mais également pour établir, à partir d'une analyse *a priori*, les praxéologies de référence nous permettant de faire l'analyse des situations d'apprentissage du manuel scolaire *Défi mathématique* (Lyons et Lyons, 2005*a*). C'est finalement à partir de l'analyse praxéologique que nous avons pu décortiquer nos activités fonctionnelles jusqu'à pouvoir cibler les situations d'apprentissage fonctionnelles. Ce faisant, nous pouvons maintenant répondre à nos diverses questions spécifiques qui sont les suivantes :

1. Quelle est la place de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires ? Quelles activités fonctionnelles sont exploitées ?
2. Les types de tâches des trois activités fonctionnelles apparaissent-ils dans les manuels scolaires ? Si oui, sont-ils exploités au regard de leur potentiel fonctionnel à l'aide de techniques qui reposent sur un discours technologico-théorique relatif aux fonctions ?
3. Les composantes de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle apparaissent-elles dans les techniques mises de l'avant par les auteurs du manuel scolaire ou le guide de l'enseignant ?

1. LA PLACE DE LA PENSEE FONCTIONNELLE DANS LE MANUEL SCOLAIRE

D'abord, pour décrire la place de la pensée fonctionnelle dans le manuel scolaire à l'étude, nous avons observé le déploiement de nos différentes activités fonctionnelles à travers les 803 situations d'apprentissage qu'il contient. D'abord, sur ces 803 situations, 80 ont été identifiées comme étant potentiellement fonctionnelles, ce qui représente tout près de 10 % des situations d'apprentissage du manuel scolaire. Selon nous, ceci montre la portée intéressante de l'utilisation de relations fonctionnelles en particulier pour contextualiser les apprentissages à l'aide de situations réelles. En effet, notre analyse a permis de montrer que même si des techniques fonctionnelles ne sont pas toujours utilisées pour la résolution de tâches fonctionnelles, un contexte fonctionnel peut être très utile pour favoriser notamment l'apprentissage de stratégies de calcul efficace.

Ce sont au total 64 situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles qui ont été étudiées plus en détail puisqu'elles contenaient une ou plusieurs tâches fonctionnelles. La présence d'activités de modélisation fonctionnelle, de généralisation fonctionnelle et d'étude d'une relation fonctionnelle a été relevée respectivement dans 25, 22 et 17 situations d'apprentissage. Cette répartition qui est somme toute assez équitable nous permet de conclure qu'une activité fonctionnelle n'est pas visiblement favorisée par rapport à une autre. De plus, le fait que nos activités fonctionnelles soient réparties à travers 5 des 6 sections du manuel scolaire nous pousse à renchérir sur la pertinence de l'utilisation de contextes fonctionnels pour la résolution de problèmes de toute sorte. À notre avis, ceci montre la grande diversité des situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles et les possibilités de l'utilisation du concept de fonction à travers différentes perspectives.

En bref, les activités fonctionnelles étant bien présentes dans plusieurs situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles, nous en concluons qu'elles ont une place indéniable dans le manuel scolaire. En effet, qu'elles soient exploitées à travers des tâches et des techniques fonctionnelles ou non, elles permettent une contextualisation des apprentissages intéressante, ce qui constitue l'une des cibles importantes du *Programme de formation de l'école québécoise* (2004).

2. LA PRÉSENCE DES GENRES DE TÂCHES ET DES TYPES DE TÂCHES DE NOS PRAXÉOLOGIES DE RÉFÉRENCE

Pour analyser le potentiel des situations d'apprentissage des manuels scolaires, nous voulions à la fois pouvoir poser un regard critique sur les contextes utilisés dans les activités et sur les techniques favorisées pour la réalisation des différentes tâches. Nous avons ainsi fait référence à l'analyse praxéologique qui nous a permis de décomposer chaque situation d'apprentissage afin de dresser un portrait objectif des tâches et des techniques qui sous-tendent les activités fonctionnelles. En comparant nos résultats d'analyse à notre modèle épistémologique de référence, nous pouvons fournir quelques éléments de réponse quant au potentiel du manuel scolaire pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle.

2.1 Les genres de tâches et types de tâches de la modélisation fonctionnelle

Tout d'abord, dans notre analyse *a priori*, nous avons identifié six genres de tâches qui englobent les différentes activités qui sont habituellement mobilisées par la modélisation fonctionnelle : *Identifier les différentes données de la situation réelle ; Générer des données ; Organiser des données ; Déterminer la relation fonctionnelle entre les quantités variables ; Représenter la relation fonctionnelle ; Prédire des données à partir du modèle fonctionnel.* La modélisation est un processus pendant lequel une situation réelle est observée, afin d'en retirer les informations qui permettent de la traiter mathématiquement (Squalli, 2000). Les résultats mathématiques sont ensuite recontextualisés pour répondre aux contraintes de la situation réelle. La grande portée de la modélisation offre ainsi une grande variété de types de tâches qui ont le potentiel d'accompagner les différents moments de ce processus. Dans le programme de formation du primaire, la modélisation est surtout mise en valeur dans la compétence 1 : résoudre une situation-problème. Il est en effet attendu de l'élève qu'au troisième cycle, il puisse être en mesure de décoder des situations et qu'il manifeste de plus en plus d'autonomie dans ses démarches de modélisation (Gouvernement du Québec, 2006).

Par l'analyse de nos situations d'apprentissage, nous avons pu constater que le genre de tâches *Générer des données* n'est pratiquement pas exploité (5 tâches sur 118). Or, le processus de modélisation prenant tout son sens lors de l'étude d'une situation réelle, les expériences constituent un contexte porteur pour développer cet aspect de la pensée fonctionnelle. D'ailleurs, dans leur étude, Blanton *et al*. (2015) ont exploité ce genre de tâches dans le but de faire évoluer la pensée des élèves. Dans un même ordre d'idées, le genre de tâches *Prédire des données à partir du modèle fonctionnel* n'est pas présent dans les tâches fonctionnelles proposées par le manuel scolaire. Or, la prédiction est un aspect important l'activité de modélisation fonctionnelle. Elle permet de porter un regard critique sur le modèle fonctionnel identifié, de faire de l'extrapolation ou de l'interpolation. Les aspects de covariation et de correspondance ne sont pas traités dans les types de tâches des manuels scolaires relatives à la modélisation fonctionnelle. Or, cette dernière apporte généralement des contextes intéressants qui auraient le potentiel de favoriser le développement de ces deux concepts en prenant appui sur des situations réelles familières pour les élèves.

Plusieurs tâches du manuel scolaire sont associées au genre de tâches *Représenter la relation fonctionnelle.* Le concept de fonction s'apprivoisant tranquillement au travers ses multiples représentations (Yavuz, 2010), les 38 tâches fonctionnelles de ce genre de tâches représentent des opportunités pour le développement d'une pensée fonctionnelle, et ce, dès le primaire. De même, les nombreuses tâches portant sur la recherche d'une valeur manquante sont importantes pour le développement de la pensée fonctionnelle, même si l'objectif des situations d'apprentissage qui les contiennent relève plutôt de l'acquisition de compétences relatives au calcul efficace. En effet, pour trouver une valeur manquante dans une relation fonctionnelle, l'élève doit bien comprendre le lien de dépendance entre les quantités variables et être en mesure d'interpréter le modèle fonctionnel qui les relie. Tout au long de ce travail, l'élève fait ainsi appel à des compétences inhérentes au concept de fonction à son insu.

Au final, même si tous les types de tâches de notre praxéologie de référence pour la modélisation fonctionnelle ne sont pas mis en valeur dans les tâches du manuel scolaire, nous croyons que les situations d'apprentissage qui mettent à profit ces activités ont le potentiel de favoriser le développement précoce de la pensée fonctionnelle. En effet, la richesse des contextes qu'offrent les 25 situations d'apprentissage portant sur la modélisation d'une relation fonctionnelle entre deux quantités variables est non négligeable. De plus, l'utilisation des divers registres de représentation sémiotiques qu'elle nécessite pourrait être réinvestie par d'autres tâches fonctionnelles, ce qui permettrait d'enrichir encore plus la pensée des élèves.

2.2 Les genres de tâches et types de tâches de la généralisation fonctionnelle

Tout comme pour la modélisation fonctionnelle, les activités de généralisation fonctionnelle ne font pas partie des prescriptions ministérielles pour le programme du primaire. En fait, la généralisation en soi n'est pas un processus mentionné explicitement dans le Programme de formation de l'école québécoise du primaire. Pourtant, dans le domaine de l'arithmétique, l'élève est amené à observer des suites de nombres et à identifier la régularité qui les unit (Gouvernement du Québec, 2006). De plus, en géométrie, il observe et produit des régularités à l'aide de figures géométriques (*Ibid.*). La généralisation offre donc un contexte prometteur pour développer sa pensée mathématique.

Dans notre analyse *a priori*, nous avons nommé quatre genres de tâches qui mettent en valeur le processus de généralisation : *Identifier la relation fonctionnelle ; Formuler la relation fonctionnelle généralisée ; Rechercher un autre couple de valeurs* et *Justifier la relation fonctionnelle établie.* Avec l'analyse de nos situations d'apprentissage, nous pouvons observer que le genre de tâches *Justifier la relation fonctionnelle établie* est pratiquement inexistant (1 tâche sur 113). Or, comme il s'agit de la dernière étape du processus de généralisation, il nous semble normal, vu l'âge des élèves du primaire, que la justification ne soit pas toujours nécessaire pour développer tranquillement la tendance à généraliser de la pensée fonctionnelle. Une justification empirique qui serait plus accessible pour les élèves du primaire pourrait toutefois, à notre avis, accompagner plus régulièrement les tâches de généralisation fonctionnelle.

Le genre de tâches *Rechercher un autre couple de valeurs* est celui qui comporte le plus de tâches fonctionnelles (72,5 %). Or, ce sont également ces types de tâches qui ont été utilisés par Blanton et Kaput (2011) pour étudier le développement de la pensée fonctionnelle. Rechercher un couple de valeurs proche permet à la fois d'identifier une relation fonctionnelle entre les variables puis de la projeter à un couple de valeurs subséquent. En plus de forger la pensée fonctionnelle, nous croyons que ce genre de tâches favorise le développement de la pensée critique puisque pour éviter les généralisations abusives, l'élève doit rester à l'affût de la véracité de son nouveau résultat.

En ce qui concerne le genre de tâches *Formuler la relation fonctionnelle,* notre constat le plus surprenant revient à la place importante donnée à l'utilisation du langage algébrique. En effet, vu le niveau scolaire étudié, nous pensions initialement que les généralisations seraient majoritairement formulées à l'aide de mots. L'introduction au langage algébrique n'étant faite qu'au premier cycle du secondaire dans le programme officiel, ce type de tâches nous montre possiblement une intention des auteurs de vouloir enrichir les registres de représentation sémiotiques utilisés par les élèves.

En conclusion, selon nous, l'activité de généralisation fonctionnelle occupe une place considérable dans le manuel scolaire. En effet, en plus d'occuper 34,4 % de toutes nos activités fonctionnelles, elles sont toutes accompagnées de tâches fonctionnelles. Ainsi, les contextes offerts par ces activités sont toujours exploités de manière fonctionnelle. De plus, les types de tâches de notre praxéologie de référence sont presque tous mis à profit, ce qui laisse entrevoir la richesse des situations d'apprentissage mobilisant la généralisation fonctionnelle.

2.3 Les genres de tâches et types de tâches de l'étude d'une relation fonctionnelle

Notre praxéologie de référence pour l'étude d'une relation fonctionnelle est celle qui est la moins mise à profit par le manuel scolaire. En effet, ce ne sont que deux types de tâches de notre praxéologie de référence sur un total de 15 qui sont reflétés par les tâches fonctionnelles. Or, comme les fonctions ne sont pas encore objets d'étude au primaire, il peut s'avérer normal qu'aucun travail ne soit fait sur les caractéristiques des fonctions et sur la recherche d'une réciproque.

Nous trouvons surprenant que genre de tâches *Représenter la relation fonctionnelle dans divers registres de représentation* ne soit pas mis à profit dans les activités fonctionnelles de ce type. Comme les relations fonctionnelles sont déjà connues dans ces situations d'apprentissage, il aurait été possible de les exploiter pour favoriser l'apprentissage du passage d'un registre à un autre. Toutefois, comme les cibles d'apprentissage du programme du primaire sont notamment orientées vers le développement de stratégies de calcul efficace, la grande place occupée par le type de tâches *Déterminer une valeur manquante* prend tout son sens.

En résumé, très peu d'aspects de notre praxéologie de référence relative à l'étude d'une relation fonctionnelle ont été rencontrés dans les situations d'apprentissage du manuel scolaire *Défi mathématique*. Les fonctions n'étant pas objet d'étude, nous en concluons que notre praxéologie de référence serait possiblement mieux adaptée aux activités du premier cycle du secondaire.

Au regard de ce qui précède, nous croyons que la modélisation fonctionnelle et la généralisation fonctionnelle sont les deux types d'activités qui ont le potentiel de favoriser le développement de la pensée fonctionnelle dans le manuel scolaire à l'étude. À notre avis, la présence des activités d'étude d'une relation fonctionnelle étant plutôt axée sur le développement de stratégies de calcul, elles ne sont pas suffisamment exploitées pour que leur potentiel fonctionnel soit réellement mis en valeur.

3. LA PRÉSENCE DE TECHNIQUES FONCTIONNELLES

L'analyse des techniques et du discours technologico-théorique s'y rattachant nous a permis de déterminer comment les tâches fonctionnelles sont exploitées. Pour répondre à notre question de recherche, nous voulions entre autres vérifier si des concepts et des raisonnements fonctionnels étaient mis en valeur dans les techniques suggérées par les auteurs. Or, à la lumière de nos analyses, nous constatons que 18 situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles, sur un total de 64, utilisent de telles techniques. Ceci ne représente que 2,2 % de toutes les situations du manuel. Toutefois, comme les fonctions et les concepts fonctionnels ne sont pas des prescriptions ministérielles pour le programme du primaire, l'utilisation de techniques fonctionnelles pour ces quelques tâches est, à notre avis, non négligeable. En effet, plutôt que de privilégier des approches axées sur l'arithmétique, ces techniques ouvrent la porte au développement précoce de la pensée fonctionnelle. En particulier, les activités de généralisation fonctionnelle sont exploitées, une fois sur deux, par des techniques mettant en valeur la relation de dépendance fonctionnelle entre les quantités variables. De plus, elles axent la recherche de la régularité par l'étude de la covariation ou de la correspondance. Elles initient ainsi les élèves à observer une table de valeurs de diverses manières afin de découvrir des régularités.

En ce qui concerne les 47 situations potentiellement fonctionnelles qui ne sont pas exploitées par des techniques fonctionnelles, nous croyons qu'il est important de souligner, encore une fois, qu'elles auraient le potentiel de favoriser le développement de la pensée fonctionnelle. En effet, bien que les auteurs aient opté pour des techniques de résolution relevant d'autres compétences pour 17 d'entre elles, rien n'empêcherait les enseignants de les exploiter différemment. De même, pour les 29 situations d'apprentissage non accompagnées de techniques suggérées par les auteurs, nous ne pouvons définitivement assumer que les tâches fonctionnelles qu'elles contiennent ne seront pas résolues par des techniques fonctionnelles. Elles conservent donc un potentiel pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle.

4. LA PLACE DES COMPOSANTES DE LA PENSÉE FONCTIONNELLE

En entamant ce projet de recherche, nous avons rapidement constaté que peu de définitions de la pensée fonctionnelle étaient présentées dans la littérature. De plus, peu de recherches la mobilisant exposaient ses principales composantes. Notre premier objectif consistait dès lors à produire notre propre caractérisation afin d'avoir des indicateurs concrets nous permettant d'observer objectivement les situations d'apprentissage de manuels scolaires. Or, nos analyses nous ont permis de constater que nos quatre raisonnements fonctionnels sont mobilisés dans les techniques fonctionnelles recensées. Pour nous, ceci démontre une diversité des approches privilégiées par les auteurs. Bien que le raisonnement fonctionnel : *Tendance à percevoir la covariation entre deux quantités variables et à déterminer le sens de la variation* ne soit présent que pour l'une des techniques fonctionnelles, la mobilisation du concept de covariation est utilisé plus régulièrement (7/18).

Les différents concepts qui sous-tendent celui de fonction sont, pour la majorité, bien représentés dans les techniques fonctionnelles du manuel. En effet, les aspects de covariation et de correspondance sont tous deux mis à profit, ce qui permet d'initier l'élève à observer la fonction sous différentes facettes. De plus, le concept de variable étant présent dans toutes les techniques fonctionnelles, les élèves ont la possibilité de bien comprendre son aspect cinématique (Freudenthal, 2002).

Finalement, le troisième aspect de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle correspond à la communication qui est aussi bien exploitée par les techniques fonctionnelles. Ce sont en effet plusieurs registres qui sont exploités, qu'ils soient institutionnels ou non institutionnels. À travers les différentes techniques fonctionnelles utilisées pour les activités de généralisation fonctionnelle, le registre tabulaire est particulièrement sollicité, ce qui favorise selon nous l'identification de la régularité fonctionnelle puisque l'élève construit la régularité en travaillant constamment sur les deux variables à la fois. Le registre graphique, utilisé plus particulièrement dans deux activités de modélisation fonctionnelle, permet d'identifier la trajectoire d'une comète par l'examen de la régularité existant entre les couples de valeurs. Ces situations d'apprentissage favorisent à la fois l'appropriation du plan cartésien et le passage du registre graphique au registre algébrique pour la traduction du lien de dépendance entre les variables.

En résumé, les diverses composantes de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle sont bien mises de l'avant dans les techniques suggérées par les auteurs pour la résolution de tâches fonctionnelles. Au final, bien que l'une de nos composantes relatives aux concepts fonctionnels ne soit pas représentée, nous croyons que notre caractérisation de la pensée fonctionnelle est adéquate et adaptée au niveau scolaire étudié dans le cadre de cette recherche. Nous croyons également que notre modèle épistémologique de référence a le potentiel de s'étendre à la fois au secondaire et aux deux premiers cycles du primaire. En effet, comme les types de tâches identifiés sont fondés sur une analyse *a priori* qui ne se concentre pas uniquement sur le concept de fonction en tant qu'objet d'apprentissage, nous pourrions le réutiliser en ajustant nos attentes quant à la richesse des techniques suggérées.

5. SYNTHÈSE DES CONSTATS

À la lumière de tout ce qui précède, nous concluons que oui, le manuel scolaire étudié a le potentiel de favoriser le développement précoce de la pensée fonctionnelle chez les élèves du troisième cycle du primaire au Québec. Pour décrire ce potentiel, nous avons fait ressortir plusieurs éléments que nous pouvons résumer ainsi :

1. Les activités fonctionnelles fournissent des contextes riches pour donner du sens aux apprentissages de plusieurs domaines de la mathématique et elles ont une place significative dans le manuel scolaire étudié ;
2. Les trois types d'activités fonctionnelles que nous avons définis sont utilisés par le manuel scolaire. Ce dernier met donc de l'avant à la fois la modélisation fonctionnelle, la généralisation fonctionnelle et l'étude de relation fonctionnelle, ce qui enrichit la portée du développement de la pensée fonctionnelle ;
3. Plusieurs facettes des praxéologies de références construites dans le cadre de notre analyse *a priori* sont représentées par les tâches proposées par le manuel scolaire. Ceci nous indique que plusieurs éléments de la pensée fonctionnelle ont le potentiel d'être exploités ;
4. Un nombre non négligeable de techniques fonctionnelles sont suggérées par les auteurs pour la résolution des tâches. Pour nous, ceci montre une intention des auteurs de ne pas seulement utiliser les contextes fonctionnels pour favoriser le développement de compétences arithmétiques ;

5. À une exception près, toutes nos composantes de la pensée fonctionnelle sont exploitées par l'une ou l'autre des techniques suggérées par les auteurs. Ces dernières sont donc variées et offrent des opportunités diversifiées pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle.

6. LES LIMITES DE NOTRE RECHERCHE ET LES PISTES À EXPLORER

Comme dans la plupart des recherches, des limites sont associées à nos résultats. D'abord, il est nécessaire de souligner qu'un seul manuel scolaire a été étudié. Bien que son choix ait été justifié préalablement, nous ne pouvons garantir que nos résultats peuvent s'étendre aux autres collections. De plus, tous les enseignants ne suivent pas à la lettre ce que les documents d'accompagnement suggèrent. Ainsi, le potentiel du manuel scolaire pour le développement de la pensée fonctionnelle pourrait ne pas être pris en considération par les enseignants qui utilisent cette ressource didactique.

Au regard de la méthodologie de recherche, comme nous avons élaboré nous-mêmes le modèle épistémologique de référence nous permettant de faire notre analyse *a priori* des activités fonctionnelles, il faut garder en tête que cette dernière demeure un outil n'ayant pas été validé à grande échelle. Malgré l'important travail de recherche ayant été réalisé pour créer nos assises théoriques, l'ajout d'une nouvelle composante à la pensée fonctionnelle nécessiterait de faire des modifications de notre grille d'analyse. C'est un travail de longue haleine que nous poursuivrons dans nos recherches futures.

Comme le développement de la pensée fonctionnelle reste un sujet de recherche peu exploité, plusieurs éléments sont à découvrir. Dans un premier temps, nous croyons que notre caractérisation de la pensée fonctionnelle a le potentiel d'être réinvestie dans d'autres recherches. Par exemple, elle pourrait servir à caractériser le niveau de sophistication de la pensée des élèves comme ont tenté de le faire Blanton et ses collaboratrices dans leur étude de 2015. De plus, elle pourrait servir à étudier des situations d'enseignement-apprentissage qui portent de manière explicite sur le développement de la pensée fonctionnelle.

À l’aide de notre modèle épistémologique de référence, nous pourrions également identifier des balises pour la création de situations d’apprentissage ou d’une trajectoire d’apprentissages qui favoriseraient le développement précoce de la pensée fonctionnelle pour différents niveaux scolaires. Ainsi, la pensée fonctionnelle pourrait avoir sa place bien à elle dans le programme de formation québécois. Même s’il s’agit d’une entreprise ambitieuse, nous croyons qu’elle mérite amplement d’être envisagée.

CONCLUSION

En entamant ce projet de recherche, nous voulions approfondir nos connaissances sur l'apprentissage du concept de fonction au secondaire. Comme le mentionne Freudenthal (2002), la modélisation fonctionnelle est importante puisqu'elle nous permet de comprendre notre monde empreint de changement. De plus, pour Stölting (2008), un citoyen impliqué et réfléchi doit avoir la capacité de comprendre et de gérer des situations fonctionnelles pour prendre des décisions fondées. Le concept de fonction est donc central dans la formation mathématique des élèves et son potentiel traverse les divers domaines de contenus. Or, nos recherches initiales nous ont rapidement permis de constater les nombreuses difficultés qui lui sont associées. En effectuant un parallèle avec les difficultés relatives à l'apprentissage de l'algèbre et la venue du mouvement *Early Algebra* qui se veut porteur pour le développement précoce d'une pensée algébrique, notre intérêt de recherche s'est redirigé vers la pensée fonctionnelle.

Dans notre problématique, nous avons insisté sur l'importance du développement des différentes formes de la pensée mathématique et sur le manque de connaissances sur la pensée fonctionnelle. En effet, malgré son affiliation à un concept qui ne se restreint pas à un domaine de contenus, la pensée fonctionnelle reste peu étudiée. Pourtant selon Warren et Cooper (2005), le développement graduel de la pensée fonctionnelle pourrait favoriser une transition fluide vers le concept de fonction. Parmi les quelques recherches recensées qui se sont intéressées à la pensée fonctionnelle précoce, la plupart se concentrent dans le mouvement *Early Algebra* et utilisent la pensée fonctionnelle pour le développement de compétences algébriques. Les résultats de ces recherches nous ont permis de mieux cerner la capacité des élèves à mobiliser une pensée fonctionnelle dès les premières années du primaire (Blanton *et al.,* 2015). Comme nous souhaitions également sortir cette pensée du cadre algébrique, notre intérêt de recherche a migré vers le développement précoce de la pensée fonctionnelle en elle-même. En précisant nos recherches, nous avons réalisé qu'il n'existait pas, à notre connaissance, de définition de la pensée fonctionnelle faisant l'objet d'un consensus. Le premier objectif de notre recherche est ainsi devenu de créer notre propre définition de la pensée fonctionnelle et de définir du même coup ses principales composantes. Par la réalisation de ce travail considérable, nous voulions être en mesure d'analyser des manuels scolaires afin de déterminer leur potentiel pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle, c'est-à-dire avant l'apparition du concept de fonction comme objet explicite d'apprentissage. Notre hypothèse était qu'à son insu, l'élève était peut-être initié à des raisonnements fonctionnels et à l'utilisation de concepts fonctionnels par la diversité des contextes que les situations d'apprentissage des manuels scolaires proposent. Notre question de recherche s'est ainsi clarifiée pour porter sur le potentiel des situations d'apprentissage proposées par les manuels scolaires québécois pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle.

Notre cadre de référence avait deux volets intimement liés : caractériser la pensée fonctionnelle et développer un modèle épistémologique de référence pour pouvoir étudier les manuels scolaires. D'abord, pour pallier le manque de définition de la pensée fonctionnelle, nous devions apporter notre propre caractérisation de la pensée fonctionnelle. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur quatre piliers indispensables : la manière de voir la pensée et l'activité selon Radford (2011, 2013, 2015); la manière tridimensionnelle d'opérationnaliser la pensée selon certains membres de l'OIPA (Squalli *et al.,* accepté); les quelques définitions de la pensée fonctionnelle trouvées dans les recherches et le cadre conceptuel du concept de fonction. Pour nous, la pensée fonctionnelle est donc une manière de penser dans des activités faisant intervenir la notion de fonction (activités fonctionnelles) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction. C'est une prédisposition de l'esprit, qui, sur le plan opératoire, se concrétise par : un ensemble de raisonnements particuliers dans ce type d'activité ; un rapport particulier aux concepts en jeu dans ces activités ; une manière de communiquer et de représenter. Les trois activités que nous appelons fonctionnelles sont celles de modélisation fonctionnelle, de généralisation fonctionnelle et d'étude d'une relation fonctionnelle.

Pour pouvoir analyser les situations d'apprentissage des manuels scolaires de manière objective, nous avons ensuite pris nos assises dans la théorie anthropologique du didactique de Chevallard puisqu'elle fournit notamment les instruments pour la modélisation de l'activité mathématique (Bosch et Chevallard, 1999). L'analyse praxéologique, qui permet de décomposer l'activité mathématique pour en identifier les genres de tâches, les types de tâches, les tâches, les techniques et le discours technologico-théorique qui s'y rattache, est un outil précieux pour observer quelles techniques sont privilégiées en une institution. Notre caractérisation de la pensée fonctionnelle a ainsi été mise à profit dans la constitution de notre modèle épistémologique de référence. En effet, elle a fourni les assises théoriques nous permettant de construire les praxéologies de référence relatives à chacune de nos activités fonctionnelles. Ainsi, à l'aide de l'analyse praxéologique et de notre analyse *a priori*, nous avons pu concrètement dégager le potentiel des situations d'apprentissage d'un manuel scolaire pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle.

Notre méthodologie de recherche a permis d'énoncer les raisons pour lesquelles notre choix de manuel scolaire s'est arrêté sur la collection *Défi mathématique* (Lyons et Lyons, 2005*a*) pour le troisième cycle du primaire. Nous avons ensuite pu décrire en profondeur chacune des étapes de notre analyse qui a permis de faire la distinction entre des situations d'apprentissage non-fonctionnelles; potentiellement fonctionnelles; à potentiel fonctionnel non actualisé et fonctionnelles. Tout ce processus a été fait dans le respect des exigences éthiques de la recherche en éducation.

L'analyse du manuel scolaire a donné lieu à une quantité considérable de résultats. D'abord, sur les 80 situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelles identifiées, 64 ont été étudiées plus en profondeur puisqu'elles contenaient une ou plusieurs tâches fonctionnelles. Une répartition relativement équitable de nos activités fonctionnelles a été observée, ce qui montre la diversité des situations d'apprentissage proposées par le manuel scolaire. Nous croyons également que ces situations permettent une contextualisation des apprentissages intéressante. D'ailleurs, nous avons pu constater que l'activité de modélisation fonctionnelle était régulièrement sollicitée pour contextualiser des données dans le module *Jeux de nombres* dont la finalité est celle de l'apprentissage de stratégies de calcul efficace. Plusieurs aspects de notre praxéologie de référence de cette activité fonctionnelle ne sont donc pas pris en considération dans les tâches. La généralisation fonctionnelle, pour sa part, est très bien exploitée par les tâches. Le lien de dépendance entre les quantités variables est régulièrement mis en valeur et l'utilisation de la table de valeurs permet à la fois de développer les aspects de covariation et de correspondance de la fonction. Les deux premières étapes du processus de généralisation sont régulièrement mises à profit. En ce qui concerne l'étude d'une relation fonctionnelle, ce ne sont que deux types de tâches de notre praxéologie de références qui ont été sollicités. Selon nous, comme les fonctions ne sont pas encore un objet d'étude au primaire, cette constatation est normale et nous indique que cette partie de notre analyse *a priori* serait probablement mieux adaptée aux apprentissages du secondaire.

Bien que seulement 18 situations d'apprentissage soient accompagnées de techniques de résolution fonctionnelles, nous croyons qu'elles ne sont pas négligeables. En effet, elles ouvrent la porte au développement précoce de la pensée fonctionnelle alors qu'il ne s'agit pas d'une prescription ministérielle. Elles initient les élèves à des activités fonctionnelles diversifiées et favorisent notamment l'étude de la covariation et de la correspondance. Pour les 47 situations potentiellement fonctionnelles qui ne sont pas exploitées par des techniques fonctionnelles, nous continuons d'argumenter qu'elles ont le potentiel de favoriser le développement de la pensée fonctionnelle. Effectivement, rien n'empêcherait les enseignants d'utiliser ces situations d'apprentissage pour favoriser le développement des raisonnements et des concepts fonctionnels.

Finalement, nous concluons que le manuel scolaire à l'étude a le potentiel de favoriser le développement précoce de la pensée fonctionnelle chez les élèves du troisième cycle du primaire au Québec. Les différentes composantes de la pensée fonctionnelle sont bien mises de l'avant dans les techniques suggérées par les auteurs, ce qui montre la diversité des opportunités pour le développement de cette pensée. De plus, comme plusieurs registres de représentation sont mis à profit dans les activités fonctionnelles, les élèves développent peu à peu un langage qui leur sera bénéfique à bien des égards, surtout lors de l’apparition du concept de fonction comme objet explicite d’apprentissage. Malgré ces constats, la pensée fonctionnelle est encore peu étudiée et plusieurs éléments pourraient faire l’objet de recherches futures. Dans le cadre de nos études doctorales, nous comptons notamment développer encore plus notre caractérisation de la pensée fonctionnelle et nous tenterons d’identifier les possibilités et les contraintes de son développement précoce.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Arcavi, A. et Schoenfeld, A. (1987). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, *81*(6), 420-427.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M., et Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early Algebraization : A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (p. 5-23). Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

Blanton, M. et Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. Dans *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 135–142). Bergen : Norway.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.

Carlson, M. (1998). A Cross-sectional Investigation of the Development of the Function Concept. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *7*, 114-162.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. et Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. et Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 87–115.

Carraher, D., et Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 669–705.

Carranza, P., Cyr, S., Durand-Guerrier, V. et Polo, M. (2012). Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum - Compte rendu du Groupe de Travail no 3, EMF 2012. Dans *Actes du colloque EMF2012* (p. 384-390). Université de Genève.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L. et Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, *33*(3), 31–37.

Charbonneau, L. (1987). Fonction : du statisme grec au dynamisme du début du XVIIIe siècle. *Bulletin AMQ*, Mai, 5-10.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique.* Actes de l'université d'été de la rochelle, juillet 1998 (p. 1-29).

Chevallard, Y. (1997). Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique. *Skholê, 7*, 45-64.

Chevallard, Y. (2010). La didactique, dites-vous ? *Education et didactique*, 4(1), 139-146.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée, *Petit x*, 67, 33-61.

Denbel, D. G. (2015). Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum. *Journal of Education and Practice, 6*(1), 77-81.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. et Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept : from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science et Mathematics Education*, *10*(6), 1243-1267.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. Dans A.J. Bishop, S. Mellin-Olsen et J.Van Dormolen (dir.), *Mathematical knowledge : its growth through teaching.* Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, p. 63-85.

Dreyfus, T. et Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts : A Baseline Study on Intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13(*5), 360-80.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (5), 37-65.

Eisenberg, T. (1992). On the Development of a Sense for Function. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (dir.). *The concept of function; aspects of epistemology and pedagogy* (28, p. 153-174). Washington, DC : MAA Notes.

Freudenthal, H. (2002). Functions. Dans *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (p. 491–578).

Gascón, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l' « arithmétique généralisée ». *Petit x*, *37*, 43-63.

Georges, J. S. (1929). Functional thinking as an objective of mathematical Education. *School Science and Mathematics*, *29*, 601-608.

Gouvernement de l'Ontario (2008). *Mettre l'accent sur le développement du raisonnement algébrique.* Toronto, ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Gouvernement de l'Ontario. (2005). *Le curriculum de l'Ontario de la 1er à la 8e année : Mathématiques.* Toronto : ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Gouvernement du Québec. (2017). *Matériel didactique approuvé pour l'éducation préscolaire et primaire.* Disponible à l'adresse électronique : http://www1.education.gouv.qc.ca/bamd/doc/liste_primaire_fr_new.pdf

Gouvernement du Québec. (2016). *Programme de formation de l'école québécoise - mathématique 2e cycle du secondaire*. Disponible à l'adresse électronique : http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire2/index.asp?page=math

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : éducation préscolaire, enseignement primaire* : [avec mises à jour. Québec : Ministère de l'éducation, du loisir et du sport.

Gouvernement du Québec. (2004). *Programme de formation de l'école québécoise - mathématique 1e cycle du secondaire* (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport). Québec.

Houzel, C. (1997). Notion de Fonction. Dans *Encyclopedia Universalis : Dictionnaire des Mathématiques : algèbre, analyse, géométrie*. Paris : Albin Michel.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation, 30*(2), 329-354.

Hitt, F. et González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics, 88*(2), 201-219.

Kaput, J. (2008). What is algebra ? What is algebraic reasoning ? Dans *Algebra in the early grades* (p. 5-18). New York : Taylor and Francis Group.

Lebrun, J. et Niclot, D. (2009). Les manuels scolaires : réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves. *Revue des sciences de l'éducation, 35*(2), 7-14.

Lenoir, Y., Hasni, A., Lacourse, F., Larose, F., Philippe Maubant et Zaid, A. (2012). *Guide d'accompagnement de la formation à la recherche. Un outil de réflexion sur les termes et expressions liés à la recherche scientifique* (Groupéditions). Longueuil : Canada.

Lyons, M. et Lyons, R. (2005a). *Défi Mathématique : 3e cycle, manuel de l'élève*. Québec : Les éditions de la Chenelière inc.

Lyons, M. et Lyons, R. (2005b). *Défi Mathématique : 3e cycle, Guide d'enseignement*. Québec : Les éditions de la Chenelière inc.

Mason, J. (1994) *L'esprit mathématique*. Montréal : Modulo éditeur

National Council of Teachers of Mathematics (dir.). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans.* Thèse de doctorat, Université de Montréal, Québec.

Pastré, P. (2011). Situation d'apprentissage et conceptualisation. Lenoir, Y. et Tupin, F. (dir.) *Revisiter la notion de situation : approches plurielles*. Recherches en Éducation (numéro spécial) no 12, Novembre 2011.

Pilet, J. (2016). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plate-forme en ligne et évaluation.* Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII.

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Dans les actes du colloque *Espace Mathématique Francophone (EMF) sur les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum*. Alger.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification : Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal or Reasearch in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Radford, L. (2011). *Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation.* Toulouse : Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques de Toulouse.

René De Cotret, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, 17, 5–27.

Roy, P. et Hasni, A. (2014). Les modèles et la modélisationvus par des enseignants de sciences et technologies du secondaire au Québec. *McGill Journal of Education / Revue des sciences de l'éducation de McGill*, *49*(2), 349-371.

Selden, A. et Selden, J. (1992). Research Perspectives on Conceptions of Functions : Summary and Overview. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (dir.). *The concept of function; aspects of epistemology and pedagogy* (28, p. 1-16). Washington, DC : MAA Notes.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (Eds.). (1992). *The concept of function; aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes, 28, 59-84.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (dir.). *The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy* (p. 25-58). Washington, DC : MAA Notes.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the el- ementary curriculum. Dans Kaput, J., Carraher, D. et Blanton M. (dir), *Algebra in the Early Grades.* Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (accepté). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. Dans (Squalli, H. et Bronner, A. rédacteurs invités). *Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel*. NCRÉ (accepté pour publication).

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans les actes du colloque *Espace Mathématique Francophone (EMF) sur les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum*. Alger.

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base*. Thèse de doctorat en éducation, Université Laval, Québec.

Stölting, P. (2008). *La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans - Analyse comparative et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot et Universität Regenseburg.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223.

Tavignot, P. (1995). À propos de la transposition didactique en didactique des mathématiques. *Spirale–Revue de Recherches en Éducation, 15*, 31–60.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. Dans *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1 (vol. 4, p. 21-44). Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. Dans *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (vol. 1, p. 33-57). Laramie, WY : University of Wyoming : WISDOMe Monographs.

Thompson, P. W. et Carlson, M. (2017). Variation, Covariation, and Functions: Foundational Ways of Thinking Mathematically. Dans J. Cai (dir.), *Compendium for research in mathematics education* (p. 421-456). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Vollrath, H.-J. (1986). Search Strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 387-400.

Warren, E. et Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162.

Warren, E., Cooper, T. et Lamb, J. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 208-223.

Wozniak, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école : une étude de cas. *Éducation et didactique, 6*(2), 65 88.

Yavuz, I. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching ? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 468-485.

ANNEXE A

Les tâches relatives à la modélisation fonctionnelle

Modélisation fonctionnelle																		
Genre de tâche	Identifier				Générer		Org.	Déterminer					Représenter				Prédire	
Type de tâches	T_{I-V^*} : Id. variables	T_{I-D} : Id. lien dép.	T_{I-T} : Id. tendance	T_{I-S} : Id. sens variation	T_{G-D} : Gén. descrip.	T_{G-E} : Gén. expérence	T_{O-T} : Org. tabulaire	T_{D-COR} : Dét. corresp.	T_{D-COV} : Dét covar.	T_{D-M} : Dét. mod. fonc	T_{D-M} : Dét. val. manq.	T_{D-L} : Dét. limites	T_{R-G} : Rep. graphique	T_{R-T} : Rep. tabulaire	T_{R-C} : Rep. courbe	T_{R-M} : Rep. divers	T_{P-V} : Pré. comp. var	T_{P-M} : Pré. comp. mod
Code SA																		
1-64-D39-1											2							
1-64-D39-4		1									1							
1-100-B9-1			1								1							
1-103-B12-1			3								14							
1-103-B12-2														2				
1-103-B12-3													8					
1-104-B13-1										7								
1-104-B13-2											2		1					
1-107-B16-1											6							
1-142-B19-3			1		1											1		
1-143-B20-1					4										2	2		
1-145-B22-2																4		
1-167-A2-3												1						
1-172-B7-3												1						
1-173-B8-2											1							
2-114-A9-1			1								1							
2-131-C26-3				2														
2-135-C30-1			3								14							
2-135-C30-2														2				
2-135-C30-3													8					
2-156-B19-1										3								
2-156-B19-2																8		
2-157-B20-1											6							
2-157-B20-2											2							
2-198-C19-3			1															
Total	0	1	10	2	5	0	0	0	0	10	50	2	17	4	2	15	0	0

ANNEXE B
Les tâches relatives à la généralisation fonctionnelle

Généralisation fonctionnelle												
Genre de tâche	Identifier			Formuler			Rechercher			Justifier		
Type de tâches	$T_{I\text{-}I^*}$: Id. instanc.	$T_{I\text{-}RF}$: Id. rel. Fonc.	$T_{I\text{-}D}$: Id. régu. dessins	$T_{F\text{-}M}$: Form. mots	$T_{F\text{-}S}$: Form. Symb.	$T_{F\text{-}L}$: Form. Lang.	$T_{R\text{-}R}$: Rech. proche	$T_{R\text{-}É}$: Rech. lointain	$T_{R\text{-}G}$: Rech. général	$T_{J\text{-}E}$: Just. exemple	$T_{J\text{-}A}$: Just. argum.	$T_{J\text{-}P}$: Just. preuve
Code SA												
1-127-A4-3						1						
1-128-A5-3	1											
1-128-A5-4				1								
1-138-B15-2	1											
1-139-B16-2	1											
1-160-D37-5	1											
1-170-B5-1						1	2	1				
1-170-B5-2	1						4	1		1		
1-171-B6-3							1	1				
1-171-B6-4						4	18	4				
1-174-C9-2						2	5	1				
1-176-C11-3							1					
1-183-D18-2							1	1				
2-128-B23-1		1										
2-128-B23-2				1			1					
2-149-B12-1	1											
2-149-B12-2	2											
2-184-B5-1	4			1			12	4	2			
2-185-B6-3			1			1		1				
2-189-B10-2		1					1	1				
2-190-B11-1	3						13	2				
2-196-C17-1							3	1				
Total	15	2	1	3	0	9	62	18	2	1	0	0

ANNEXE C

Les tâches relatives à l'étude d'une relation fonctionnelle

Étude d'une relation fonctionnelle															
Genre de tâche	Déterminer				Décrire		Représenter			Opérer					
Type de tâches	$T_{DÉT\text{-}C^*}$: Dét. caract.	$T_{DÉT\text{-}R}$: Dét. récipro.	$T_{DÉT\text{-}RF}$: Dét. rel. fon.	$T_{DÉT\text{-}V}$: Dét. v. manq.	$T_{DÉC\text{-}COR}$: Déc. corr.	$T_{DÉC\text{-}COV}$: Déc. cov.	$T_{R\text{-}G}$: Rep. graphique	$T_{R\text{-}T}$: Rep. tabulaire	$T_{R\text{-}A}$: Rep. an. ou alg.	$T_{O\text{-}A}$: Opérer add.	$T_{0\text{-}S}$: Opérer sous.	$T_{O\text{-}P}$: Opérer prod.	$T_{O\text{-}Q}$: Opérer quo.	$T_{O\text{-}C}$: Opérer comp.	$T_{O\text{-}SÉ}$: Op. sys. équ.
Code SA															
1-53-C28-1				3											
1-53-C28-2				6											
1-53-C28-3				6											
1-64-D39-3				3											
1-65-D40-2				2											
1-65-D40-3															1
1-137-B14-3				5											
1-138-B15-1				9											
1-186-D21-3															1
2-79-A2-3				11											
2-100-C23-2				7											
2-100-C23-3				5											
2-133-C28-1				3											
2-133-C28-2				6											
2-133-C28-3				6											
2-196-C17-2				3											
2-196-C17-3										1					
Total	0	0	0	75	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2

[i] Squalli (2000, p. 69) apporte les précisions suivantes:
Selon Bouvier, A. et George, M. 1974. *Dictionnaire des mathématiques*. Paris : Presses Universitaires de France, une fonction numérique f à variable réelle est algébrique s'il existe un polynôme $P \in R[X, Y]$ tel que $P(x, f(x)) = 0$ pour tout réel x appartenant au domaine de définition de f. ($R[X, Y]$ désigne l'ensemble des polynômes en X et Y à coefficients dans R).

En généralisant cette définition au cas des fonctions à plusieurs variables réelles, nous dirons qu'une fonction numérique f à n variables réelles est algébrique s'il existe un polynôme $P \in R[X_1, X_{2, \ldots,} X_{n,} Y]$[i] tel que $P(x_1, x_{2, \ldots,} x_n, f(x_1, x_{2, \ldots,} x_{n,})) = 0$ pour tout réel $(x_1, x_{2, \ldots,} x_{n,})$ appartenant au domaine de définition de f. ($R[X_1, X_{2, \ldots,} X_{n,} Y]$ désigne l'ensemble des polynômes à n+1 indéterminées et à coefficients dans R). Nous dirons alors qu'une expression $e(x_1, x_{2, \ldots,} x_n)$ est algébrique si la fonction

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto e(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ pour } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$$

est algébrique.

Par exemple, l'expression $\sqrt{x}$, est algébrique puisque pour tout $x \geq 0$ on a $P(x, \sqrt{x}) = 0$, avec $P(X, Y) = X - Y^2$. De même l'expression $\frac{x}{y}$ est algébrique car pour tout x réel et tout y réel non nul, on a $Q(x, y, \frac{x}{y}) = 0$ avec $Q(X, Y, Z) = YZ - X$. En revanche, les expressions $sin(x)$ et $exp(x)$, par exemple, ne sont pas algébriques de domaine le système des nombres réels.